



Kapadokya Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim, Öğretim ve Araştırma Enstitüsü

İleri Teknolojiler Anabilim Dalı

**BANACH UZAYINDA GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLER  
İÇİN YENİ İTERASYON ŞEMASININ YAKINSAMA  
TEOREMLERİ**

Hüseyin GÜL

Yüksek Lisans Tezi

Nevşehir, 2025



BANACH UZAYINDA GENİŞLEMİYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN YENİ  
İTERASYON ŞEMASININ YAKINSAMA TEOREMLERİ

Hüseyin GÜL

Kapadokya Üniversitesi  
Lisansüstü Eğitim, Öğretim ve Araştırma Enstitüsü  
İleri Teknolojiler Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Nevşehir, 2025

## KABUL VE ONAY

Hüseyin Gül tarafından hazırlanan “Banach Uzayında Genişlemeyen Dönüşümler İçin Yeni İterasyon Şemasının Yakınsama Teoremleri” başlıklı bu çalışma, 01.03.2025 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

---

Dr. Öğr. Üyesi Süheyla Elmas (Başkan)

---

Dr. Öğr. Üyesi Esra Yolaçan (Danışman)

---

Dr. Öğr. Üyesi Nazlı Kadioğlu Karaca (Üye)

Yukarıdaki imzanın adı geçen öğretim üyesine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Sinan AKILLI

Enstitü Müdürü

## YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Kapadokya Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinleri yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan *“Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge”* kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricince YÖK Ulusal Tez Merkezi / Kapadokya Üniversitesi tarafından açık erişime açılır.

- Enstitü / Fakülte yönetim kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.
- Enstitü / Fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren ..... ay ertelenmiştir.
- Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir.

01/03/2025

**Hüseyin Gül**

## ETİK BEYAN

Bu çalışmadaki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, yararlandığım kaynaklara bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu, tezimin/dönem projemin kaynak gösterilen durumlar dışında zgn olduğunu, Dr. Esra Yolaçan danışmanlığında tarafımdan üretildiğini ve Kapadokya Üniversitesi Lisansüstü Eğitim, ğretim ve Araştırma Enstitüsü Tez ve Dönem Projesi Yazım Yönergesine göre yazıldığını beyan ederim.

01/03/2025

**Hüseyin Gl**

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu alışma, Kapadokya Üniversitesi İleri Teknolojiler programında hazırlanmıştır.

Öncelikle, bu çalışmayı yönlendiren, bilgi ve deneyimleriyle bana rehberlik eden danışman hocam Sayın Dr. Esra Yolaçan'a sonsuz teőkükürlerimi sunarım. Değerli önerileri, sabrı ve teőkvik edici tutumu, bu çalışmanın her aşamasında yolumu aydınlatmıştır.

Bu süreçte sevgili kızım Masal'a olan minnettarlığımı ifade etmek istiyorum. Hayatımın en değerli hediyesi olan kızım, bu zorlu yolculuk boyunca bana güç veren en büyük ilham kaynağım oldu. Onun masum gülüşü, koşulsuz sevgisi ve varlığı, her zorlukta bana dayanma gücü verdi. Sevgili kızım, bu tez yalnızca bir akademik başarı değer, aynı zamanda senin gözlerinde görmeyi umduğum gurur ve mutluluğun bir sembolüdür. Hayatta her zaman senin için en iyi örnek olmayı arzuladım ve umarım bu çalışma, hayallerine ulaşabileceğin bir yol haritası çizmen için sana ilham verir. Seni sonsuz sevgiyle kucaklıyorum.

Hüseyin GÜL  
Mart, 2025

## ÖZET

GÜL, Hüseyin. *Banach Uzayında Genişlemeyen Dönüşümler için Yeni İterasyon Şemasının Yakınsama Teoremleri*, Yüksek Lisans Tezi, Nevşehir, 2025

Bu tezde, düzgün konveks Banach uzayındaki genişlemeyen dönüşümler için yeni bir iterasyon metodu sunuldu ve bazı varsayımlar altında zayıf ve kuvvetli yakınsama teoremleri çalışıldı. Ayrıca önerilen iterasyonun mevcut olan diğer iterasyonlarla hızları karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçları desteklemek için sayısal örnekleri ele aldık ve sabit noktayı Matlab R2016a kullanarak bilgisayarla sayısal olarak yaklaştık.

**Anahtar Kelimeler:** Genişlemeyen Dönüşüm, Sabit Nokta, Yinelemeli Süreç, Yakınsama Hızı

**ABSTRACT**

GÜL, Hüseyin. *Convergence Theorems of The New Iteration Scheme for Nonexpansive Mappings in Banach Space*, Master's Thesis, Nevşehir, 2025

In this thesis, a new iterative method for nonexpansive mappings in uniform convex Banach space is presented and weak and strong convergence theorems are studied under some assumptions. We also compare the rate of the recommended iteration with other existing iterations. To support the obtained results, we consider numerical examples and approximate the fixed point numerically using Matlab R2016a.

**Keywords:** Nonexpansive Mappings, Fixed Points, Iterative Process, Rate of Convergence

## İÇİNDEKİLER

<b>KABUL VE ONAY .....</b>	<b>i</b>
<b>YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI.....</b>	<b>ii</b>
<b>ETİK BEYAN.....</b>	<b>iii</b>
<b>TEŞEKKÜR .....</b>	<b>iv</b>
<b>ÖZET.....</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER .....</b>	<b>vii</b>
<b>TABLolar DİZİNİ .....</b>	<b>viii</b>
<b>SİMGELER DİZİNİ .....</b>	<b>ix</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ .....</b>	<b>x</b>
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. KURAMSAL TEMELLER.....</b>	<b>3</b>
<b>2.1. Genel Kavramlar.....</b>	<b>3</b>
<b>2.2. Sabit Nokta Kavramı.....</b>	<b>7</b>
<b>2.3. Dönüşümlerin Sabit Noktaları.....</b>	<b>10</b>
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM.....</b>	<b>12</b>
<b>3.1. İterasyon Metotları .....</b>	<b>12</b>
<b>3.2. Yakınsama Hızları .....</b>	<b>22</b>
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....</b>	<b>25</b>
<b>4.1. Genişlemeyen Dönüşümlerin Yakınsamaları .....</b>	<b>25</b>
<b>4.2. Genişlemeyen Dönüşümler İçin Temel Sonuçlar .....</b>	<b>25</b>
<b>4.3. Sayısal Örnekler .....</b>	<b>31</b>
<b>5. SONUÇ.....</b>	<b>36</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>37</b>
<b>EK 1. ORİJİNALLİK RAPORU .....</b>	<b>40</b>

## TABLOLAR DİZİNİ

<b>Tablo 1: Picard İterasyonunun Aldığı Değerler ve Adım Sayısı Arasındaki Değişim</b>	<b>12</b>
<b>Tablo 2: Başlangıç Tahminleriyle Önerilen Yinelemeli Yöntemin Sayısal Sonuçları</b>	<b>32</b>
<b>Tablo 3: Başlangıç Tahminleriyle Önerilen Yinelemeli Yöntemin Sayısal Sonuçları</b>	<b>33</b>
<b>Tablo 4: Mann, <math>S</math> – İterasyonu, Abbas&amp;Nazir İterasyon Metodu, Modifiye Edilmiş Z- İterasyonu ile Sabit Noktaya Yakınsama Hızları Karşılaştırılması</b>	<b>33</b>
<b>Tablo 5: Thakur, Thakur, Postolache İterasyon Metodu, M İterasyonu ve Z- İterasyonu ile, Modifiye Edilmiş Z- İterasyonu ile Sabit Noktaya Yakınsama Hızları Karşılaştırılması</b>	<b>34</b>

**SİMGELER DİZİNİ**

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^n$	$n$ -boyutlu reel uzay
$u_n \rightarrow u$	Kuvvetli yakınsaklık
$u_n \rightharpoonup u$	Zayıf yakınsaklık
$(\mathcal{E}, d)$	Metrik uzay
$(\mathcal{E}, \ \cdot\ )$	Normlu uzay
$B_{\mathcal{E}}$	$\mathcal{E}$ uzayındaki kapalı birim yuvar
$\mathcal{C}(\mathcal{E}, \mathbb{R})$	Sürekli reel değerli lineer fonksiyonların kümesi
$D(u_0; r)$	$u_0$ merkezli ve $r$ yarıçaplı açık yuvar
$F_Y, \text{Fix}(Y), F(Y)$	$Y$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $x_0 = -0.7690$ ve $x_0 = 0.2530$ Başlangıç Değerleri Picard İterasyonunun Yakınsama Davranışı.....	13
Şekil 2. $x_0 = -99$ Başlangıç Değeri S- İterasyonunun Yakınsama Davranışı.....	18
Şekil 3. $x_0 = 1000$ Başlangıç Değeri Abbas&Nazir İterasyonunun Yakınsama Davranışı.....	19
Şekil 4. $x_0 = 0$ Başlangıç Değeri M İterasyonunun Yakınsama Davranışı.....	21
Şekil 5. $x_0 = 98$ Başlangıç Değeri Z İterasyonunun Yakınsama Davranışı.....	22

## 1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, önemli uygulamalara sahip olan matematikte temel bir kavramdır. Uygun bir  $Y$  fonksiyonu için  $Yx = x$  şeklinde yazılabilen bir denklemin çözümünü bir fonksiyonun sabit noktası bulma işlemidir. Sabit noktaları belirleyerek, örneğin, makine öğreniminde ve diğer yapay zeka uygulamalarında yaygın olarak kullanılan yinelemeli algoritmaların davranışına ilişkin içgörüler elde edilebilir. Bu, algoritmaların yakınsamasını anlamak ve performansları hakkında tahminlerde bulunmak için bir çerçeve sağlar. Dahası, sabit nokta sonuçlarının uygulanması yalnızca matematikle sınırlı değildir, aynı zamanda istatistik, bilgisayar bilimleri, görüntü oluşturma, sinyal işleme, kimya bilimleri, fizik bilimleri, ekonomi, biyolojik bilimler, tıp bilimleri, mühendislik, oyun teorisi vb. gibi diğer alanlarda da geçerlidir.

Tam metrik uzaylarda, sabit nokta teorisinin temel sonucu literatürde ilk kez 1922 yılında tanıtılan Banach büzülme (daralma) ilkesidir. Bu ilke sadece bir sabit noktanın varlığını ve benzersizliğini göstermekle kalmaz, aynı zamanda Picard yinelemeli algoritmasının o sabit noktaya yakınsamasını da sağlar. Ayrıca, basitliği, faydası ve uygulanabilirliği nedeniyle Banach büzülme ilkesi, matematiksel analiz birçok dalında varlık problemlerini çözmede son derece iyi bilinen bir araç haline gelmiştir.

Senter ve Dotson (1974), Mann iterasyon algoritmasını kullanarak genişlemeyen bir dönüşüm için  $Y'$  nin sabit noktalarını yaklaşık olarak hesaplarken, Maiti&Ghosh (1989) ve Tan&Xu (1993),  $(A)$  koşulu altında Ishikawa iterasyon algoritmasını kullanarak sabit noktaları yaklaşık olarak hesapladılar ve  $(A)$  koşulunun  $\mathcal{U}'$  nin kompaktlığından daha zayıf olduğunu belirttiler.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra, ikinci bölümde, çalışmamızda kullandığımız temel tanımlar ve bazı önemli dönüşümler tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde, öncelikle bazı önemli iterasyon metotları verilmiştir. Sonrasında yakınsama hızları ile ilgili kavramlara ve ispatlarda kullanacağımız tanım ve yardımcı teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, öncelikle yeni bir iterasyon metodu (Modifiye edilmiş  $Z$  –iterasyon metodu) tanıtılmış. Daha sonra genişlemeyen dönüşümler için bir reel Banach uzayında önerilen algoritma kullanılarak bazı yakınsama teoremleri verilmiştir. Akabinde de bu iterasyonun Mann,  $S$  –iterasyonu, Abbas&Nazir İterasyon Metodu, Thakur, Thakur, Postolache İterasyon Metodu,  $M$  iterasyonu, ve  $Z$  iterasyonu ile sabit noktaya yakınsama hızları karşılaştırmak için sayısal örneklere yer verilmiştir.

Beşinci ve son bölümde ise, çalışmamızda ulaştığımız sonuçlara yer verilmiştir.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

### 2.1. Genel Kavramlar

Bazı temel kavram ve teoremler bu bölümde sunulacaktır.

**2.1.1. Tanım:**  $\mathbb{E} \neq \emptyset$  herhangi bir küme olmak üzere,  $d: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu,  $\forall u, v, w \in \mathbb{E}$  için,

- i.*  $d(u, v) \geq 0$ ,
- ii.*  $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ ,
- iii.*  $d(u, v) = d(v, u)$ ,
- iv.*  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ ,

şartlarını sağlıyorsa  $d$  fonksiyonuna  $\mathbb{E}$  kümesi üzerinde bir metrik, üzerinde bir  $d$  metriği tanımlı olan  $\mathbb{E}$  kümesine de metrik uzay denir ve ekseriyetle  $(\mathbb{E}, d)$  veya  $\mathbb{E}_d$  simgeleri ile gösterilir.  $\mathbb{E}$  kümesinin öğelerine  $(\mathbb{E}, d)$  metrik uzayının noktaları denir (Başkan vd 2006).

**2.1.2. Tanım:**  $\{u_n\}$ ,  $(\mathbb{E}, d)$  metrik uzayında bir dizi olsun.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$  olacak biçimde bir  $u \in \mathbb{E}$  varsa  $\{u_n\}$  dizisine  $\mathbb{E}$  de yakınsak ve  $u$  noktasına da dizinin limiti denir.  $\{u_n\}$  dizisi yakınsak ve limiti  $u$  ise

$$u_n \rightarrow u \text{ veya } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$$

sembollerinden biri ile gösterilir (Bayraktar 2006).

**2.1.3. Tanım:**  $\{u_n\}$ ,  $(\mathbb{E}, d)$  metrik uzayında bir dizi olsun. Verilen  $\forall \varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $m, n > n_0$  için

$$d(u_n, u_m) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir  $n_0$  doğal sayısı bulunabilirse  $\{u_n\}$  dizisine  $(\mathbb{E}, d)$  metrik uzayında bir Cauchy dizisi denir (Başkan vd 2006).

**2.1.4. Tanım:**  $(\mathbb{E}, d)$  metrik uzayındaki her bir Cauchy dizisi yakınsak ise  $\mathbb{E}$  metrik uzayına tam metrik uzay adı verilir (Bayraktar 2006).

**2.1.5. Tanım:**  $\mathcal{U}$ ,  $(\mathbb{E}, d)$  metrik uzayının bir alt kümesi olsun. Şayet  $\mathcal{U}$  kümesinin her bir açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü var ise  $\mathcal{U}$  e kompakt küme denir (Başkan vd 2006).

**2.1.6. Tanım:**  $(\mathbb{E}, d)$  ve  $(\Theta, \rho)$  iki metrik uzay,  $g: \mathbb{E} \rightarrow \Theta$  bir dönüşüm ve  $u_0 \in \mathbb{E}$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  sayısı için,  $d(u, u_0) < \delta$  olduğunda

$$\rho(g(u), g(u_0)) < \varepsilon$$

ya da buna denk olarak

$$g(D(u_0; \delta)) \subseteq D(g(u_0); \varepsilon)$$

olacak biçimde bir  $\delta > 0$  sayısı mevcutsa,  $g$  ye  $u_0$  noktasında süreklidir denir.  $g$ ,  $\mathbb{E}$  in tüm noktalarında sürekli ise  $g$  ye  $\mathbb{E}$  de süreklidir denir (Başkan vd 2006).

**2.1.7. Tanım:**  $\mathbb{E}$  bir metrik uzay ve  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{E}$  olsun.  $\forall u \in \mathcal{B}$  için  $D(u; r) \subseteq \mathcal{B}$  olacak biçimde bir  $r \geq 0$  sayısı mevcutsa,  $\mathcal{B}$  ye  $\mathbb{E}$  in açık alt kümesi denir.  $\mathbb{E}$  in herhangi bir  $M$  alt kümesinin  $\mathbb{E}$  deki tümleyeni olan  $M^c = \mathbb{E} - M$ ,  $\mathbb{E}$  de açık ise  $M$  ye kapalı küme denir (Bayraktar 2006).

**2.1.8. Tanım:**  $\mathbb{E} \neq \emptyset$  bir küme ve  $\tau$ ,  $\mathbb{E}$  in bazı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Şayet  $\tau$  ailesi için

i.  $\mathbb{E}, \emptyset \in \tau$ ,

ii.  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$  olduğunda  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \tau$ ,

iii.  $\Lambda$  herhangi bir küme olmak üzere her bir  $\alpha \in \Lambda$  için  $A_\alpha \in \tau$  olduğunda  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \tau$ , koşulları gerçekleşiyor ise  $\tau$  ailesine  $\mathbb{E}$  kümesi üzerinde bir topoloji (topolojik yapı),  $(\mathbb{E}, \tau)$  ikilisine topolojik uzay denir (Başkan vd 2006).

**2.1.9. Tanım:**  $F$  bir cisim ve  $L \neq \emptyset$  bir küme olsun.  $+: L \times L \rightarrow L$  ve  $.: F \times L \rightarrow L$  işlemleri tanımlansın. Şayet aşağıda verilen koşullar sağlanıyorsa,  $L$  kümesine  $F$  cismi üzerinde lineer uzay denir.

A.  $(L, +)$  değişmeli bir gruptur. Yani,

i.  $\forall u, v \in L; u + v \in L$  dir,

ii.  $\forall u, v, w \in L$  için  $u + (v + w) = (u + v) + w$  dir,

- iii. Her  $u \in L$  için  $\xi + u = u + \xi = u$  olacak şekilde  $\xi \in L$  vardır,
- iv. Her  $u \in L$  için  $(-u) + u = u + (-u) = \xi$  olacak şekilde  $-u \in L$  vardır,
- v. Her  $u, v \in L$  için  $v + u = u + v$  dir.

B.  $\vartheta, \omega \in F$  ve  $u, v \in L$  olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır.

- i.  $\vartheta. u \in L$  dir,
- ii.  $\vartheta. (u + v) = \vartheta. u + \vartheta. v$  dir,
- iii.  $(\vartheta + \omega). u = \vartheta. u + \omega. u$  dir,
- iv.  $(\vartheta\omega). u = \vartheta. (\omega. u)$  dir,
- v.  $1. u = u$  dir.

$F = \mathbb{R}$  ise  $L$  ye reel lineer uzay denir (Bayraktar 2006).

**2.1.10. Tanım:**  $L$  bir lineer uzay ve  $M \subseteq L$  olsun. Her  $u, v \in M$  için

$$K = \{a \in L: a = \vartheta u + (1 - \vartheta)v, \quad \vartheta \in [0,1]\} \subseteq M$$

ise,  $M$  kümesine konvektir denir (Kreyszing 1989).

**2.1.11. Tanım:**  $\mathbb{E}$ , sayı cismi  $F$  olan bir lineer uzay olsun. Eğer her  $u, v \in \mathbb{E}$  ve  $\alpha \in F$  için

$$\rho = \|\cdot\|: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}, \rho(u) = \|u\|$$

fonksiyonu

$$N1. \|u\| \geq 0,$$

$$N2. \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta,$$

$$N3. \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|,$$

$$N4. \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

koşullarını gerçekleştiriyor ise  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $\mathbb{E}$  üzerinde bir norm ve  $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$  ikilisine ise normlu uzay denir (Başkan vd 2006).

**2.1.12. Tanım:**  $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$  normlu uzayındaki her bir Cauchy dizisi yakınsak ise  $\mathbb{E}$  normlu uzayına Banach uzayı denir (Bayraktar 2006).

**2.1.13. Tanım:**  $L, F$  cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$I1. \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$I2. \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

$$I3. \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

$$I4. \langle u, u \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \theta$$

şartlarını sağlayan  $\langle \cdot, \cdot \rangle: L \times L \rightarrow F$  fonksiyonuna iç çarpım fonksiyonu denir. Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı lineer uzaya iç çarpım uzayı denir. İç çarpım uzayı  $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ya da  $L$  ile gösterilir (Bayraktar 2006).

**2.1.14. Tanım:**  $\mathcal{E}$  bir iç çarpım uzayı ve  $\| \cdot \|$  iç çarpım normu olsun.

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$$

şeklinde tanımlanırsa  $(\mathcal{E}, d)$  bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu  $d$  metriğine göre  $\mathcal{E}$  iç çarpım uzayı tam ise,  $\mathcal{E}$  e Hilbert uzayı denir (Bayraktar 2006).

Hilbert uzayları, özel bir normdan elde edilmiş Banach uzaylarıdır.

**2.1.15. Tanım:**  $\mathcal{E}$  bir normlu lineer uzay olsun.  $C(\mathcal{E}, \mathbb{R})$  ile  $\mathcal{E}$  de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli lineer fonksiyonların kümesini ifade edelim  $\forall u \in \mathcal{E}$  ve  $Y_1, Y_2 \in C(\mathcal{E}, \mathbb{R})$  için

$$\begin{cases} (Y_1 + Y_2)(u) = Y_1(u) + Y_2(u) \\ (\alpha Y_1)(u) = \alpha Y_1(u) \end{cases}$$

ise, bu durumda  $C(\mathcal{E}, \mathbb{R})$  bir lineer uzaydır. Bu  $C(\mathcal{E}, \mathbb{R})$  uzayına  $\mathcal{E}$  in normlu duali denir ve  $\mathcal{E}^*$  ile ifade edilir.  $\mathcal{E}^*$  in normlu duali

$$L(\mathcal{E}^*, \mathbb{R}) = (\mathcal{E}^*)^*$$

ya da  $\mathcal{E}^{**}$  ile ifade edilir ve bunada  $\mathcal{E}$  normlu uzayının normlu ikinci duali denir (Bayraktar 2006).

**2.1.16. Tanım:**  $\mathcal{E}$  normlu uzay ve  $\{u_n\} \subseteq \mathcal{E}$  olsun. Şayet,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$$

olacak biçimde bir  $u \in \mathbb{E}$  mevcutsa,  $\{u_n\}$  dizisi  $u$  e kuvvetli yakınsaktır denir ve bu durum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$$

şeklinde veya  $u_n \rightarrow u$  ile ifade edilir. Buradaki  $u$  ya,  $\{u_n\}$  dizisinin kuvvetli limiti denir (Bayraktar 2006).

**2.1.17. Tanım:**  $\mathbb{E}$  normlu uzay ve  $\{u_n\} \subseteq \mathbb{E}$  olsun. Şayet  $\forall g \in \mathbb{E}^*$  için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n) = g(u)$$

olacak biçimde bir  $u \in \mathbb{E}$  mevcutsa,  $\{u_n\}$  dizisi  $u$  ya zayıf yakınsaktır denir ve  $u_n \rightarrow u$  ile ifade edilir. Buradaki  $u$  ya,  $\{u_n\}$  dizisinin zayıf limiti denir (Bayraktar 2006).

## 2.2. Sabit Nokta Kavramı

**2.2.1. Tanım:**  $\mathbb{E} \neq \emptyset$  bir küme ve  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  herhangi bir dönüşüm olsun. Şayet  $Y(u) = u$  olacak biçimde bir  $u \in \mathbb{E}$  mevcutsa, bu  $u$  noktasına  $Y$  nin sabit noktası denir.  $Y$  nin tüm sabit noktalarının kümesi “sabit nokta kümesi” olarak adlandırılır ve  $F_Y, F(Y)$  veya  $Fix(Y)$  ile gösterilir (Berinde 2006).

Yani, herhangi bir  $c \in \mathbb{E}$  noktasının  $Y(x)$  fonksiyonunun bir sabit noktası olması için gerek ve yeter şart  $Y(c) = c$  şartını sağlamasıdır. Grafiksel anlamda, bir sabit nokta,  $(x, Y(x))$  noktası  $y = x$  doğrusu üzerinde olduğu anlamına gelir ya da başka bir deyişle  $Y$  dönüşümünün bu doğru ile ortak bir noktaya sahip olmasıdır. Örneğin;

*i.*  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$  olmak üzere  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $Y(x) = 3x^2 - 5x$  dönüşümünün sabit noktası  $F(Y) = \{0, 2\}$  dir.

*ii.*  $\mathbb{E} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  olmak üzere  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $Y(x) = \frac{7+x^2}{x}$  dönüşümünün sabit noktalarının kümesi  $F(Y) = \emptyset$  dir.

*iii.*  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$  olmak üzere  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $Y(x) = -\cos x + x - 1$  dönüşümünün sabit noktalarının kümesi  $F(Y) = \{(2k + 1)\pi: k \in \mathbb{Z}\}$  dir.

**2.2.2. Tanım:**  $\mathbb{E} \neq \emptyset$  bir küme ve  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  bir dönüşüm olsun. Herhangi bir  $x \in \mathbb{E}$  için  $n$  adet  $Y$  den elde edilen  $Y \circ Y \circ Y \circ \dots \circ Y(x)$  dönüşümüne de  $Y$  nin  $n$ .iterasyonu adını alır ve

$$\underbrace{Y \circ Y \circ Y \circ \dots \circ Y}_{n \text{ tane}}(x) = Y(Y(\dots Y(x) \dots)) = Y^n(x)$$

şeklinde tanımlanır ve  $Y^n = \underbrace{Y \circ Y \circ Y \circ \dots \circ Y}_{n \text{ tane}}$  ile gösterilir.

Örneğin;  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$  olmak üzere,  $Y(x) = x^4 - 7$  ile tanımlı  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  fonksiyonunun üçüncü iterasyonu

$$Y^3(x) = Y(Y(Y(x))) = ((x^4 - 7)^4 - 7)^4 - 7$$

ile verilir.

**2.2.3. Tanım:**  $(\mathbb{E}, d)$  bir metrik uzay ve  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  bir dönüşüm olsun. Her  $x, y \in \mathbb{E}$  için,

$$d(Yx, Yy) \leq \varrho d(x, y) \quad (2.1)$$

olacak biçimde bir  $\varrho \geq 0$  sayısı mevcutsa,  $Y$  ye Lipschitzian dönüşüm denir. (2.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük  $\varrho$  sayısına da Lipschitz sabiti; eşitsizlikte  $\varrho \in [0,1)$  olması halinde sağlanıyorsa,  $Y$  ye büzülme dönüşümü (daraltan dönüşüm) denir (Berinde 2006).

**2.2.4. Tanım:**  $(\mathbb{E}, d)$  bir metrik uzay ve  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  bir dönüşüm olsun.  $\forall x, y \in \mathbb{E}$  için,

$$d(Yx, Yy) \leq d(x, y)$$

ise,  $Y$  ye genişlemeyen dönüşüm denir (Berinde 2006).

**2.2.5. Tanım:**  $\mathbb{E}$  bir normlu uzay,  $\mathbb{U} \neq \emptyset \subseteq \mathbb{E}$  ve  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  bir dönüşüm olsun. Şayet  $\forall x, y \in \mathbb{U}$  için

$$\|Y^n x - Y^n y\| \leq L \|x - y\|, \forall n \geq 1$$

olacak biçimde  $L > 0$  sayısı mevcutsa,  $Y$  ye düzgün Lipschitzian dönüşüm adı verilir (Berinde 2006).

**2.2.6. Tanım:**  $\mathbb{E}$  bir normlu uzay,  $\mathcal{U} \neq \emptyset \subseteq \mathbb{E}$  ve  $Y: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  bir dönüşüm olsun. Şayet  $\forall x, y \in \mathcal{U}$  için

$$\|Y^n x - Y^n y\| \leq a_n \|x - y\|, \forall n \geq 1$$

olacak biçimde  $a_n \rightarrow 1$  koşulunu sağlayan bir  $\{a_n\} \subset [1, \infty)$  dizisi mevcutsa,  $Y$  ye asimptotik genişlemeyen dönüşüm adı verilir (Agarwal vd 2009).

**2.2.6. Tanım:**  $\mathbb{E}$  bir Banach uzayı olsun. Her  $\varepsilon > 0$  ve

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ ve } \|x - y\| \geq \varepsilon$$

koşullarını sağlayan her  $x, y \in \mathbb{E}$  için

$$\frac{1}{2} \|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak biçimde  $\delta(\varepsilon) > 0$  sayısı mevcutsa,  $\mathbb{E}$  e düzgün konveks uzay denir (Aksoy ve Khamsi 1990).

**2.2.8. Tanım:**  $\mathbb{E}$  bir normlu uzay,  $\mathcal{U} \neq \emptyset \subseteq \mathbb{E}$  ve  $Y: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  bir dönüşüm olsun.  $\forall x, y \in \mathcal{U}$  için

$$\|Y^n x - Y^n y\| \leq \|x - y\| + \sigma_n \varphi(\|x - y\|) + e_n, \forall n \geq 1 \quad (2.2)$$

olacak şekilde  $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\varphi(0) = 0$  kesin artan sürekli fonksiyonu ve  $n \rightarrow \infty$  iken  $\sigma_n, e_n \rightarrow 0$  olduğunda  $\{\sigma_n\}, \{e_n\}$  negatif olmayan reel sayı dizileri mevcutsa  $Y$  dönüşümüne total asimptotik genişlemeyen dönüşüm adı verilir (Albert vd 2005).

### 2.3. Dönüşümlerin Sabit Noktaları

Bu bölümde, bazı önemli sabit nokta teoremlerini ifade edeceğiz.

**2.3.1. Teorem:**  $M, \mathbb{R}^n$  de kapalı bir küre olsun. Bu durumda  $g: M \rightarrow M$  sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamisi ve Kirk 2001). Bu teorem Brouwer sabit nokta teoremi olarakta bilinir.

**2.3.2. Teorem:**  $E$  bir Banach uzayı ve  $U \neq \emptyset$ ,  $E$  de kompakt konveks bir alt küme ve  $g: U \rightarrow U$  sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda  $g$  en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamisi ve Kirk 2001). Bu teorem Schauder sabit nokta teoremi olarakta bilinir.

**2.3.3. Teorem:**  $E$  lokal konveks uzay ve  $U \neq \emptyset$ ,  $E$  de kapalı konveks bir alt küme olsun. Eğer,  $Y: E \rightarrow E$  sürekli dönüşümü için  $Y(U)$  nin kapanışı kompakt ise  $Y$  dönüşümünün bir sabit noktası vardır (Agarwal vd 2009). Bu teorem Tychonoff sabit nokta teoremi olarak da bilinir.

Şimdi, dönüşümün tek sabit noktasını garanti eden Banach Büzülme İlkesini ifade edelim:

**2.3.4. Teorem:**  $(E, d)$  bir tam metrik uzay ve  $Y: E \rightarrow E$  daraltan bir dönüşüm ise o zaman

i)  $Y$  nin bir ve yalnız bir  $x \in E$  noktası vardır.

ii) Herhangi bir  $x_0 \in E$  için  $\{Y^n x_0\}$  iterasyon dizisi,  $Y$  nin bu sabit noktasına yakınsar yani her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n = Yx_{n-1}$  ile tanımlı  $\{x_n\}$  iterasyon dizisi  $Y$  nin bu sabit  $x$  noktasına yakınsar (Soykan 2008).

**İspat:** İlk olarak sabit bir noktanın varlığını ispatlayalım.  $x_0 \in E$  başlangıç noktasını seçelim.

$$x_0, \quad x_1 = Yx_0, \quad x_2 = Yx_1 = Y^2x_0, \dots, x_{n+1} = Yx_n = Y^{n+1}x_0$$

iterasyon dizisini dikkate alalım.  $m > n$  için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(Y^n x_0, Y^m x_0) = d(Y^n x_0, Y^n Y^{m-n} x_0) \\ &\leq \alpha^n d(x_0, Y^{m-n} x_0) = \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \\ &\leq \alpha^n \{d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) \{1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

yazılır.  $0 < \alpha < 1$  olduğundan  $\{x_n\}$  dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. Ancak,  $(\mathbb{E}, d)$  bir tam metrik uzay olduğundan  $x_n \rightarrow x$  ve böylece  $x_{n+1} \rightarrow x$  dir.  $Y$  dönüşümü sürekli olduğundan dizesel süreklidir, buradan  $Yx_n \rightarrow Yx$  dir. Şimdi  $x \in \mathbb{E}$  elemanının  $Y$  nin bir sabit noktası olduğunu ispat edelim.

$$\begin{aligned} d(Yx, x) &\leq d(Yx, Y^n x_0) + d(Y^n x_0, x) \\ &\leq \alpha d(x, x_{n-1}) + d(x_n, x) \end{aligned}$$

olup  $d(Yx, x) = 0$  elde edilir ve böylece  $Yx = x$  elde edilir.

Son olarak,  $Y$  nin sabit noktasının tek olduğunu gösterelim.  $\forall y \in \mathbb{E}$  için  $Yy = y$  olsun. O zaman,

$$d(x, y) = d(Yx, Yy) \leq \alpha d(x, y)$$

olur.  $0 < \alpha < 1$  olduğundan  $d(x, y) = 0$  olması gerekir. Bu da,  $x = y$  demektir.

Banach Büzülme İlkesi,  $Yx = x$  denklemi için sadece bir çözümün varlığından bahsetmez. Ayrıca çözümün bulunması için pratik bir metodu verir; yani ardışık yaklaşımları (Picard iterasyonunun)  $Yx = x$  denkleminin çözümüne yakınsar. Banach Sabit Nokta Teoreminden

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$$

eşitsizliğine sahibiz. Bu sabit noktaya yaklaşım olarak  $n$ . iterasyonun seçimindeki hatayı hesaplamada kullanılabilir (Soykan 2008).

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1. İterasyon Metotları

Bu bölümde, bazı sabit nokta iterasyon metotları ve dördüncü bölümde kullanacağımız yardımcı teoremlere yer verilecektir. Bu kısımdaki tüm hesaplamalar Matlab R2016a bilgisayar programı yardımıyla gerçekleştirilmiştir.

##### 3.1.1. Picard İterasyonu

$(\mathbb{E}, d)$  bir metrik uzay,  $\mathcal{U}, \mathbb{E}'$  nin boştan farklı kapalı bir alt kümesi ve  $Y : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  bir dönüşüm olsun.  $x_0 \in \mathbb{E}$  olmak üzere

$$x_n = Yx_{n-1} = Y^n x_0, \quad n \geq 1, \quad (3.1)$$

şeklinde Picard iterasyonu tanımlanır (Picard 1890).

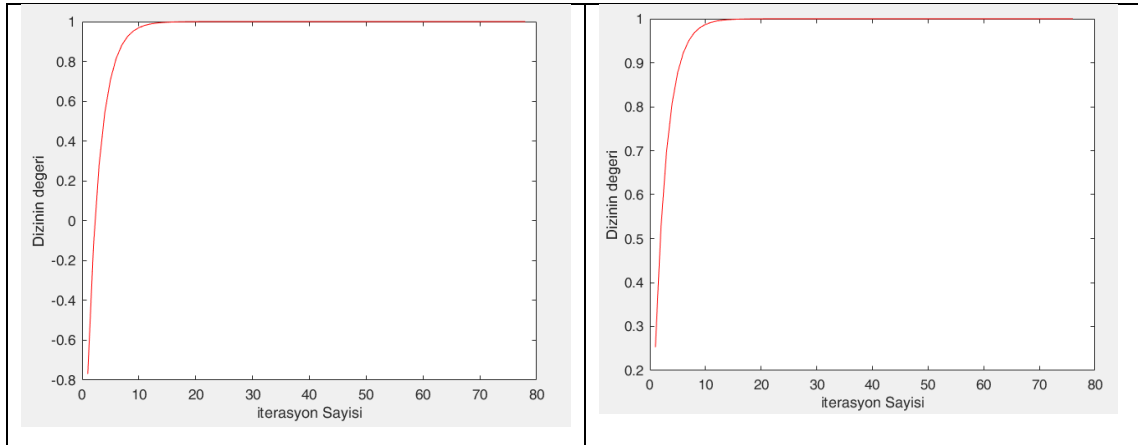
**3.1.2. Örnek:**  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{U} = [-1,1] \subset \mathbb{E}$ ,  $Y: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  ve  $Yx = \frac{7x+4}{11}$  olsun.  $Y$ , daraltan bir dönüşüm ve  $F(Y) = \{1.00\}$  dir. Herhangi bir  $x_0 = -0.7690$  ve  $x_0 = 0.2530$  noktaları için (3.1) Picard iterasyonun adım sayısı ve değerleri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki çizelgede gösterelim.

**Tablo 1: Picard İterasyonunun Aldığı Değerler ve Adım Sayısı Arasındaki Değişim**

$n$	$x_0 = -0.7690$	$x_0 = 0.2530$
1	-0.1257	0.5246
2	0.2836	0.6975
3	0.5441	0.8075
4	0.7099	0.8775
5	0.8154	0.9220
6	0.8825	0.9504
7	0.9252	0.9684
8	0.9524	0.9799
9	0.9697	0.9872
10	0.9807	0.9919
⋮	⋮	⋮
20	0.9998	0.9999
⋮	⋮	⋮
30	1.0000	1.0000
⋮	⋮	⋮
40	1.0000	1.0000
⋮	⋮	⋮
50	1.0000	1.0000
⋮	⋮	⋮

Tablo 1’de hesaplanan veriler vasıtasıyla Şekil 1 elde edilmiştir.

**Şekil 1.  $x_0 = -0.7690$  ve  $x_0 = 0.2530$  Başlangıç Değerleri Picard İterasyonunun Yakınsama Davranışı**



**3.1.3. Örnek:**  $\Xi = [0,1]$  olmak üzere  $\forall x \in \Xi$  için  $Y: \Xi \rightarrow \Xi$ ,  $Yx = 1 - x$  olsun.  $Y$ , genişlemeyen bir dönüşümdür ve  $F(Y) = \{2^{-1}\}$  dir. Herhangi bir  $x_0 = \varpi \neq 2^{-1}$  için (3.1) Picard iterasyonu,  $(\varpi, 1 - \varpi, \varpi, 1 - \varpi, \dots)$  salınımlı dizisine karşılık gelir. Bu dizi  $\varpi \neq 2^{-1}$  için yakınsak olmadığından, bu iterasyon, dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz (Berinde 2006). Bu nedenle, istenilen sabit noktaya ulaşmak için başka bir iterasyon tekniğine gerek duyulmaktadır.

### 3.1.4. Krasnoselskij İterasyonu

$(\Xi, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay ve  $Y: \Xi \rightarrow \Xi$  bir dönüşüm olsun. Krasnoselskij iterasyonu,  $x_0 \in \Xi$  ve  $\varrho \in [0,1]$  için

$$x_{n+1} = (1 - \varrho)x_n + \varrho Yx_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır.  $\varrho = 1$  için, (3.2) eşitliği (3.1) ifadesine indirgenir (Krasnoselskij 1955).

3.1.3. Örnekte kullandığımız Picard iterasyonu, sabit noktayı bulmak için bize yarar sağlamamıştı. Şimdi, (3.2) algoritmasını kullanarak yakınsamanın var olup olmadığını inceleyelim.

**3.1.5. Örnek:**  $\Xi = [0,1]$  olmak üzere  $\forall x \in \Xi$  için  $Y: \Xi \rightarrow \Xi$ ,  $Yx = 1 - x$  olsun.  $Y$  bir dönüşüm ve  $F(Y) = \{2^{-1}\}$  dir. Herhangi bir  $x_0 = \varrho \neq 2^{-1}$  ve  $\varrho = 2^{-1}$  noktası için (3.2) Krasnoselskij iterasyonu,  $(2^{-1}, 2^{-1}, 2^{-1}, \dots)$  dizisine karşılık gelir. Bu dizi  $\varrho \neq 2^{-1}$  için  $Y$  dönüşümünün sabit noktasına yakınsar.

### 3.1.6. Kirk İterasyonu

$\Xi$  bir normlu uzay ve  $Y: \Xi \rightarrow \Xi$  bir dönüşüm olsun.  $x_0 \in \Xi$  olmak üzere

$$x_{n+1} = \varrho_0 x_n + \varrho_1 Yx_n + \varrho_2 Y^2 x_n + \dots + \varrho_j Y^j x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.3)$$

şeklinde Kirk iterasyonu tanımlanır. Burada  $i = 0, 1, 2, \dots, j$  için  $\varrho_1 > 0$  ve  $\varrho_i \geq 0$  olmak üzere

$$\sum_{i=0}^j \varrho_i = 1$$

dir (Kirk 1971). (3.3) eşitliğinde  $j = 1$  için Krasnoselskij iterasyonu ve  $j = 0$  için Picard iterasyonuna indirgenir.

### 3.1.7. Mann İterasyonu

Banach büzülme ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için Mann tarafından kurulmuştur.  $\Xi$  bir normlu uzay,  $\mathcal{U}$ ,  $\Xi$ ' nin boştan farklı konveks bir alt kümesi,  $Y: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in \mathcal{U}$  için

$$x_{n+1} = (1 - \varrho_n)x_n + \varrho_n Yx_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

şeklinde Mann iterasyonu tanımlanır. Burada  $\{\varrho_n\} \in (0,1)$  aralığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n = \infty$$

şartlarını sağlayan bir dizidir (Mann 1953).

(3.4) eşitliği ile verilen Mann iterasyonunda  $\varrho_n = \varrho$  (sabit) olarak alınırsa bu iterasyon, Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Berinde 2006).

**3.1.8. Örnek:**  $\Xi = [0,2]$  olmak üzere her  $x \in [0,2]$  için  $Y: \Xi \rightarrow \Xi$  dönüşümü

$$Yx = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ \sqrt{\frac{-x^2 + 4}{3}}, & x \in [1,2] \end{cases}$$

şeklinde genişlemeyen dönüşümü tanımlansın ve  $F(Y) = \{1,00\}$  dir.  $\forall n \geq 1$  için  $\varrho_n = 5^{-1}$  şeklinde tanımlansın. (3.4) eşitliği ile verilen algoritmada herhangi bir  $x_0 = 1.7527$  noktası için ilk 25 terim: 1.5134, 1.3617, 1.2585, 1.1863, 1.1350, 1.0981, 1.0715, 1.0522, 1.0382, 1.0279, 1.0204, 1.0150, 1.0110, 1.0080, 1.0059, 1.0043, 1.0032, 1.0023, 1.001, 1.0012, 1.0009, 1.0007, 1.0005, 1.0004, 1.0003 şeklindedir. Bu dizi için  $Y$  dönüşümünün sabit noktasına yakınsar (Jia vd 2022).

### 3.1.9. Ishikawa İterasyonu

$\Xi$  bir normlu uzay,  $\mathcal{U}, \Xi'$  nin boştan farklı konveks bir alt kümesi,  $Y: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in \mathcal{U}$  için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \varrho_n)x_n + \varrho_n Y y_n, \\ y_n = (1 - \zeta_n)x_n + \zeta_n Y x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.5)$$

şeklinde Ishikawa iterasyonu tanımlanır. Burada  $\{\varrho_n\}, \{\zeta_n\} \in [0,1]$  aralığında reel diziler ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n = \infty$$

dir (Ishikawa 1974). Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümler için (3.4) eşitliği ile verilen iterasyon şemasının yetersizliğinden dolayı bu yöntem oluşturulmuştur (Berinde 2006).

$\zeta_n = 0$  alınırsa bu şema Mann iterasyonuna indirgenir. Bu duruma rağmen, (3.4) ve (3.5) eşitliği ile verilen iterasyonlar için yakınsama sonuçları arasında bir illiyet bağı yoktur (Berinde 2006).

**3.1.10 Örnek:**  $\mathbb{E} = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$  kümesi üzerinde  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $Yx = \frac{1}{x}$  olarak tanımlanırsa,  $F(Y) = \{1,00\}$  dir.  $\forall n \geq 1$  için  $\varrho_n = \zeta_n = 5^{-1}$  şeklinde tanımlansın. (3.5) eşitliği ile verilen algoritmada herhangi bir  $x_0 = 0.5881$  noktası için ilk 20 terim: 0.7172, 0.8083, 0.8704, 0.9123, 0.9405, 0.9597, 0.9726, 0.9814, 0.9874, 0.9914, 0.9942, 0.9960, 0.9973, 0.9982, 0.9988, 0.9992, 0.9994, 0.9996, 0.9997, 0.9998 şeklindedir. Bu dizi için  $Y$  dönüşümünün sabit noktasına yakınsar (Yıldırım, 2010).

### 3.1.11. Noor İterasyonu

$\mathbb{E}$  bir normlu uzay,  $\mathbb{U}$ ,  $\mathbb{E}$ ' nin boştan farklı konveks bir alt kümesi,  $Y: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in \mathbb{U}$  için,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \varrho_n)x_n + \varrho_n Y y_n, \\ y_n = (1 - \zeta_n)x_n + \zeta_n Y z_n, \\ z_n = (1 - \vartheta_n)x_n + \vartheta_n Y x_n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

şeklinde Noor iterasyonu tanımlanır. Burada,  $\{\varrho_n\}$ ,  $\{\zeta_n\}$  ve  $\{\vartheta_n\}$  (0,1) aralığında reel diziler ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n = \infty$$

dir (Noor 2000).

**3.1.12. Örnek:**  $\mathbb{E} = [0,1]$ ,  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  ve  $Yx = \cos(x)$  olsun.  $Y$  bir dönüşüm ve  $F(Y) = \{0,73909\}$  dir.  $\forall n \geq 1$  için  $\varrho_n = \zeta_n = \vartheta_n = \frac{2}{9}$  şeklinde tanımlansın. (3.6) eşitliği ile verilen algoritmada herhangi bir  $x_0 = \frac{\pi}{3}$  noktası için ilk 25 terim: 0.9441, 0.8761, 0.8310, 0.8009, 0.7807, 0.7671, 0.7580, 0.7518, 0.7477, 0.7449, 0.7430, 0.7417, 0.7409, 0.7403, 0.7399, 0.7396, 0.7395, 0.7393, 0.7392, 0.7391, 0.7391, 0.7391, 0.7391, 0.7391 şeklindedir. Bu dizi için  $Y$  dönüşümünün sabit noktasına yakınsar (Yolacan, 2015).

### 3.1.13. $S$ – İterasyonu

2007 yılında Agarwal ve arkadaşları tarafından oluşturulmuştur.  $\mathbb{E}$  bir normlu uzay,  $\mathcal{U}, \mathbb{E}'$  nin boştan farklı konveks bir alt kümesi,  $Y: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in \mathcal{U}$  için

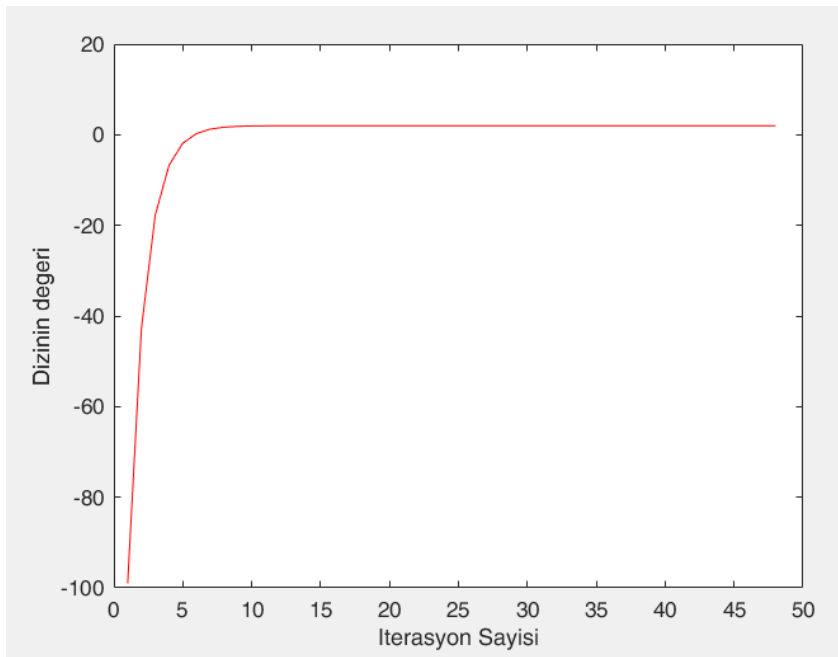
$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \varrho_n)Yx_n + \varrho_n Yy_n, \\ y_n = (1 - \zeta_n)x_n + \zeta_n Yx_n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.7)$$

şeklinde  $S$  – iterasyonu tanımlanır. Burada,  $\{\varrho_n\}$  ve  $\{\zeta_n\}$   $(0,1)$  aralığında reel dizilerdir (Agarwal vd 2007).

Agarwal ve arkadaşları, daraltan dönüşümler için  $S$  –iterasyonunun Picard iterasyonu ile aynı hızla ve Mann iterasyonuna göre daha hızlı yakınsadığını göstermişlerdir (Agarwal vd 2007).

**3.1.14. Örnek:**  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ,  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  ve  $Yx = 1 + \frac{x}{2}$  olsun.  $Y$ , daraltan bir dönüşüm ve  $F(Y) = \{2.0000\}$  dir.  $\forall n \geq 1$  için  $\varrho_n = \zeta_n = \frac{23}{48}$  şeklinde tanımlansın. Herhangi bir  $x_0 = -99$  noktası için (3.7)  $S$  – iterasyonunun yakınsama davranışı,  $x_1 = -42.7026$ ,  $x_2 = -17.7854$ ,  $x_3 = -6.7570$ ,  $x_4 = -1.8758$ ,  $x_5 = 0.2846$ ,  $x_6 = 1.2407$ ,  $x_7 = 1.6640$ ,  $x_8 = 1.8513$ ,  $x_9 = 1.9342$ ,  $x_{10} = 1.9709$ ,  $x_{11} = 1.9871$ ,  $x_{12} = 1.9943$ ,  $x_{13} = 1.9975$ ,  $x_{14} = 1.9989$ ,  $x_{15} = 1.9995$ ,  $x_{16} = 1.9998$ ,  $x_{17} = 1.9999$ ,  $x_{18} = 2.0000$ ,  $x_{19} = 2.0000$ ,  $x_{20} = 2.0000, \dots$ ,  $x_{30} = 2.0000, \dots$ ,  $x_{40} = 2.0000, \dots$ ,  $x_{50} = 2.0000$  şeklindedir. Bu dizi için  $Y$  dönüşümünün sabit noktasına yakınsar (Agarwal vd 2009). Elde edilen veriler aracılığıyla Şekil 3.2. elde edilmiştir.

**Şekil 2.**  $x_0 = -99$  Başlangıç Değeri S- İterasyonunun Yakınsama Davranışı



### 3.1.15. Abbas&Nazir İterasyonu

$\mathbb{E}$  bir normlu uzay,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathbb{E}$ ' nin boş olmayan konveks alt küme,  $Y: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in \mathcal{U}$  için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \varrho_n)Yy_n + \varrho_n Yz_n, \\ y_n = (1 - \zeta_n)Yx_n + \zeta_n Yz_n, \\ z_n = (1 - \vartheta_n)x_n + \vartheta_n Yx_n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.8)$$

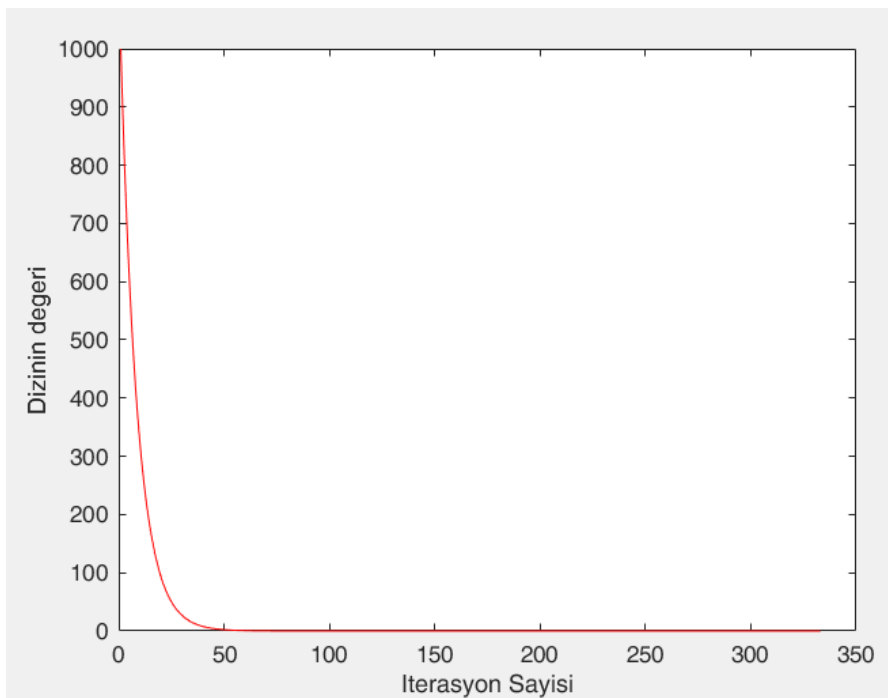
Şeklinde Abbas&Nazir iterasyonu tanımlanır. Burada,  $\{\varrho_n\}$ ,  $\{\zeta_n\}$  ve  $\{\vartheta_n\}$   $(0,1)$  aralığında reel dizilerdir (Abbas ve Nazir, 2014).

(3.8) ile tanımlanan iterasyon yöntemi Picard, Mann ve S-İterasyonundan daha hızlıdır (Abbas ve Nazir, 2014).

**3.1.16. Örnek:**  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ,  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  ve  $Yx = -x$  olsun.  $Y$ , genişlemeyen bir dönüşüm ve  $F(Y) = \{0.0000\}$  dir.  $\forall n \geq 1$  için  $\varrho_n = \zeta_n = \vartheta_n = 17^{-1}$  şeklinde tanımlansın. Herhangi bir  $x_0 = 1000$  noktası için (3.8) Abbas&Nazir iterasyonunun yakınsama davranışı,  $x_1 = 882.7600$ ,  $x_2 = 779.2653$ ,  $x_3 = 687.9042$ ,  $x_4 = 607.2543$ ,  $x_5 =$

$536.0599$ ,  $x_6 = 473.2122$ ,  $x_7 = 417.7328$ ,  $x_8 = 368.7578$ ,  $x_9 = 325.5247$ ,  $x_{10} = 287.3602$ ,  $\dots$ ,  $x_{50} = 1.9594$ ,  $\dots$ ,  $x_{100} = 0.0038$ ,  $\dots$ ,  $x_{150} = 7.5231E - 06$ ,  $\dots$ ,  $x_{200} = 1.4741E - 08$ ,  $\dots$ ,  $x_{250} = 2.8884E - 11$ ,  $\dots$ ,  $x_{300} = 5.6598E - 14$  şeklindedir. Bu dizi için  $Y$  dönüşümünün sabit noktasına yakınsar (Agarwal vd 2009). Elde edilen veriler doğrultusunda Şekil 3 oluşturulmuştur.

**Şekil 3.  $x_0 = 1000$  Başlangıç Değeri Abbas&Nazir İterasyonunun Yakınsama Davranışı**



### 3.1.17. Thakur, Thakur, Postolache İterasyonu

$\mathcal{E}$  bir normlu uzay,  $\mathcal{U}, \mathcal{E}'$  nin boştan farklı konveks bir alt kümesi,  $Y: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in \mathcal{U}$  keyfi bir nokta olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = Yy_n, \\ y_n = Y[(1 - \varrho_n)x_n + \varrho_n z_n], \\ z_n = (1 - \zeta_n)x_n + \zeta_n Yx_n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır. Burada,  $\{\varrho_n\}$  ve  $\{\zeta_n\}$   $(0,1)$  aralığında reel dizilerdir (Thakur vd 2016a).

**3.1.18. Örnek:**  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ,  $Y: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{E}$  ve  $Yx = 1/(1+x)$  olsun.  $Y$ , genişlemeyen bir dönüşüm ve  $F(Y) = \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}$  dir.  $\forall n \geq 1$  için  $q_n = \zeta_n = 0.5$  şeklinde tanımlansın. (3.9)

eşitliği ile verilen algorithmada herhangi bir  $x_0 = 10$  noktası için ilk 15 terim: 0.8950, 0.6433, 0.6204, 0.6183, 0.6181, 0.6180, 0.6180, 0.6180, 0.6180, 0.6180, 0.6180, 0.6180, 0.6180, 0.6180, 0.6180 şeklindedir. Bu dizi için  $Y$  dönüşümünün sabit noktasına yakınsar (Agarwal vd 2009).

### 3.1.19. $M$ İterasyonu

$\mathbb{E}$  bir normlu uzay,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathbb{E}$ ' nin boş olmayan konveks alt kümesi,  $Y: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in \mathcal{U}$  için

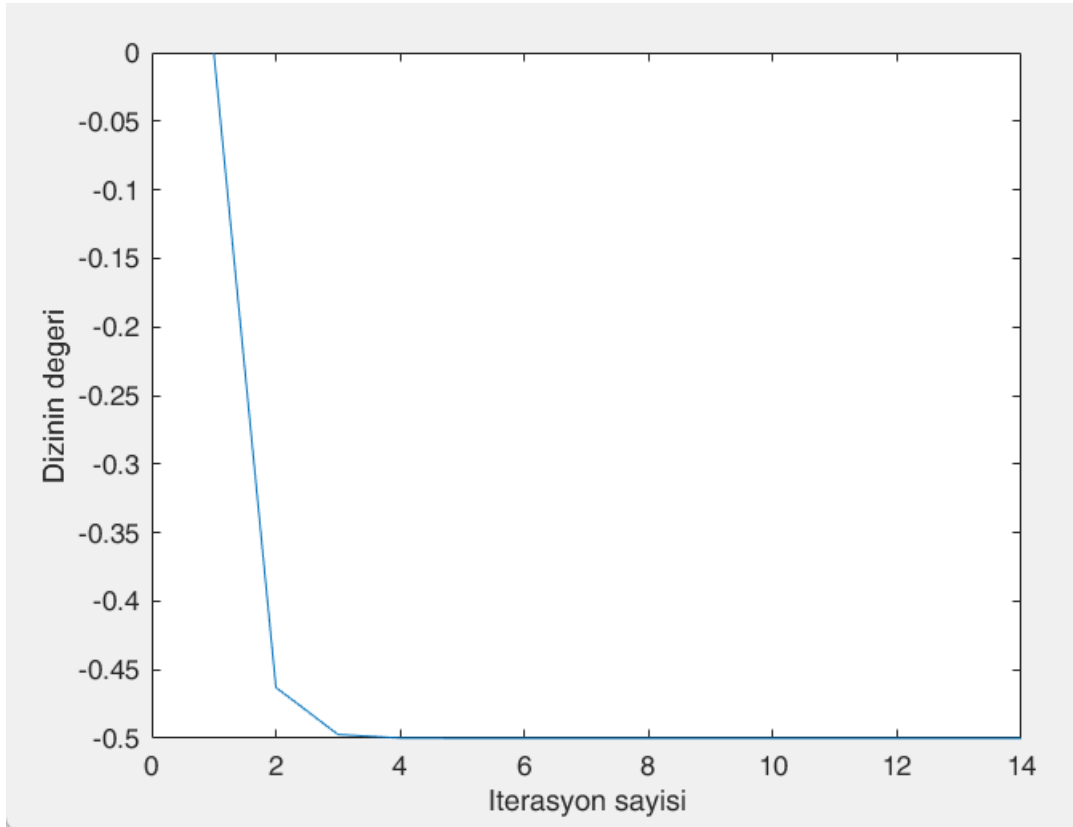
$$\begin{cases} x_{n+1} = Yy_n, \\ y_n = Yz_n, \\ z_n = (1 - q_n)x_n + q_n Yx_n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.10)$$

şeklinde  $M$  iterasyonu tanımlanır. Burada,  $\{q_n\}$   $(0,1)$  aralığında reel dizilerdir (Ullah ve Arshad, 2018).

**3.1.20. Örnek:**  $\mathbb{E} = [-0.5, 0.5]$ ,  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  ve  $Yx = \begin{cases} \frac{-1+x}{3}, & x \neq 0.5 \\ 0, & x = 0.5 \end{cases}$  bir dönüşüm ve

$F(Y) = \{-0.5\}$  dir.  $\forall n \geq 1$  için  $q_n = 0.5$  şeklinde tanımlansın. (3.10) eşitliği ile verilen algorithmada herhangi bir  $x_0 = 0$  noktası için ilk 15 terim:  $-0.4630, -0.4973, -0.4998, -0.5000, -0.5000, -0.5000, -0.5000, -0.5000, -0.5000, -0.5000, -0.5000, -0.5000, -0.5000, -0.5000, -0.5000$  şeklindedir. Bu dizi için  $Y$  dönüşümünün sabit noktasına yakınsar (Abdeljawad vd 2024). Elde edilen veriler aracılığıyla Şekil 3.4. elde edilmiştir.

Şekil 4.  $x_0 = 0$  başlangıç değeri M iterasyonunun yakınsama davranışı



### 3.1.21. Z – İterasyonu

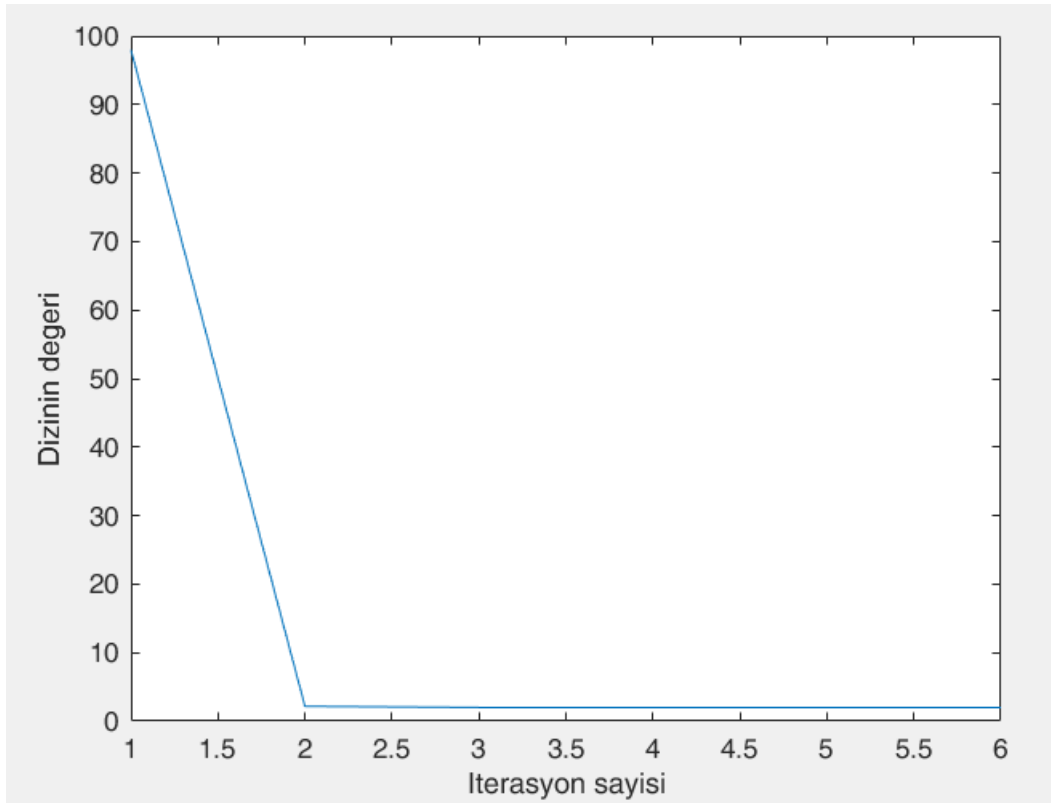
$\mathbb{E}$  bir normlu uzay,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathbb{E}$ ' nin boştan farklı konveks bir alt kümesi,  $Y: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in \mathcal{U}$ ,

$$\begin{cases} c_n = Yk_n, \\ k_n = (1 - \varrho_n)x_n + \varrho_n Yx_n, \\ b_n = Yf_n, \\ f_n = (1 - \zeta_n)c_n + \zeta_n Yc_n, \\ x_{n+1} = Yb_n, n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.11)$$

şeklinde Z –iterasyonu tanımlanır. Burada,  $\{\varrho_n\}$  ve  $\{\zeta_n\}$  (0,1) aralığında reel dizilerdir (Srivastava vd 2024).

**3.1.22. Örnek:**  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^+$ ,  $\Upsilon: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  ve  $\Upsilon x = \sqrt{2+x}$  bir dönüşüm ve  $F(\Upsilon) = \{2\}$  dir.  $\forall n \geq 1$  için  $\varrho_n = \zeta_n = 0.5$  şeklinde tanımlansın. Herhangi bir  $x_0 = 98$  noktası için (3.11) Z iterasyonunun yakınsama davranışı,  $x_1 = 2.1676$ ,  $x_2 = 2.0010$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 2$ ,  $x_5 = 2$ ,  $x_6 = 2$ ,  $x_7 = 2$  şeklindedir. Bu dizi için  $\Upsilon$  dönüşümünün sabit noktasına yakınsar (Ali vd 2021). Elde edilen veriler aracılığıyla Şekil 3.5. elde edilmiştir.

**Şekil 5.  $x_0 = 98$  başlangıç değeri Z iterasyonunun yakınsama davranışı**



### 3.2. Yakınsama Hızları

Bu başlık altında, dördüncü bölümde teoremlerimizi desteklemek için vereceğimiz örneklerde aşağıdaki tanımlar faydalı olacaktır.

**3.2.1. Tanım:**  $\mathbb{E}$  bir Banach uzayı  $\mathcal{U}$ ,  $\mathbb{E}'$  nin boştan farklı kapalı, konveks bir alt kümesisi ve  $\Upsilon: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  bir dönüşüm olsun.  $\Upsilon$  dönüşümünün  $q$  sabit noktasına yakınsayan dizileri  $\{x_n\}$  ve  $\{z_n\}$  olsun. Eğer her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\|x_n - q\| \leq \|z_n - q\|$$

koşulunu sağlıyorsa, bu durumda  $\{x_n\}$  nin  $\{z_n\}$  ye göre daha hızlı yakınsadığı söylenir (Rhoades, 1976).

**3.2.2. Tanım:**  $\{a_n\}$ ' nin,  $\forall n \geq 1$  için  $a_n \neq a$  olmak üzere  $a$ 'ya yakınsayan bir dizi olduğunu varsayalım.  $\lambda$  ve  $\alpha$  pozitif sabitleri şu şekilde mevcutsa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} - a|}{|a_n - a|^\alpha} = \lambda,$$

bu durumda,  $\{a_n\}$  asimptotik hata sabiti  $\lambda$  ile  $\alpha$  mertebesinde  $a$ 'ya yakınsar. Eğer  $\alpha = 1$  (ve  $\lambda < 1$ ) ise, dizi doğrusal olarak yakınsaktır ve  $\alpha = 2$  ise dizi ikinci dereceden yakınsaktır (Burden ve Faires, 2010).

Berinde, iki yinelemeli yöntem arasındaki yakınsama oranını aşağıdaki gibi karşılaştırmak için 3.2.2. Tanım'ı kullanmıştır (Berinde, 2002).

**3.2.3. Tanım:**  $\{a_n\}$  ve  $\{b_n\}$ , sırasıyla  $a$  ve  $b$  ye yakınsayan pozitif sayıların iki dizisi ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n - a|}{|b_n - b|} = l$$

olsun.

- i.*  $l = 0$  ise  $\{a_n\}$  nin  $a$  ya yakınsaması,  $\{b_n\}$  nin  $b$  ye yakınsamasından daha hızlıdır.
- ii.*  $0 < l < \infty$  ise,  $\{a_n\}$  ve  $\{b_n\}$  dizileri aynı yakınsaklık oranına sahiptir.
- iii.*  $l = \infty$  ise,  $\{b_n\}$  dizisi  $\{a_n\}$  dizisinden daha hızlı yakınsar (Berinde, 2002).

### 3.3. Yardımcı Teoremler

Bu başlık altında, bir sonraki bölümde teoremleri ispatlarken kullanacağımız tanımlara ve yardımcı teoremlere yer verilmiştir.

**3.3.1. Tanım:**  $Y: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  bir dönüşüm ve  $F(Y) \neq \emptyset$  olsun. Şayet  $\forall r > 0$  için  $f(r) > 0$ ,  $f(0) = 0$  olacak biçimde azalmayan bir  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  dönüşümü var ve

$$\forall x \in \mathcal{U} \text{ için } \|x - Yx\| \geq f(d(x, \mathcal{F}))$$

ise,  $Y$  ye (A) şartını sağlıyor denir. Burada  $d(x, \mathcal{F}) = \inf_{y \in \mathcal{F}} d(x, y)$  dir (Senter ve Dotson 1974). (A) şartı,  $\mathcal{U}$  nın kompaktlığından daha zayıftır (Tan ve Xu 1993).

**3.3.2. Tanım:** Bir  $\mathbb{E}$  Banach uzayında  $x_n \rightarrow x$  ve her  $y \neq x$  için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

olmasını gerektiriyorsa,  $\mathbb{E}$  Opial şartını sağlıyor denir (Opial 1967).

**3.3.3 Tanım:**  $\mathbb{E}$  bir reel Banach uzayı,  $Y: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  bir dönüşüm ve  $\mathcal{F} = \{e^*\}$  olsun. Şayet,  $\mathbb{E}$  deki  $\{x_n\}$  dizisi  $e^*$  a zayıf ve  $\{Yx_n\}$  dizisi  $p$  ye kuvvetli yakınsadığında  $Ye^* = p$  oluyorsa  $Y$  ye  $p$  de demicloseddir denir (Agarwal vd 2009).

**3.3.4 Yardımcı Teorem:**  $\mathbb{E}$  düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve  $\mathcal{U}$ ,  $\mathbb{E}'$  nin boştan farklı kapalı, konveks bir alt kümesi olsun.  $Y: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{E}$  asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ise,  $(I - Y)$  sıfırda demicloseddir (Chidume vd 2003).

**3.3.5 Yardımcı Teorem:**  $\mathbb{E}$  düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve  $B_r = \{x \in \mathbb{E}: \|x\| \leq r\}$  olsun. Ayrıca  $\varrho: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\varrho(0) = 0$  kesin artan sürekli ve konveks fonksiyonu verilsin.  $\forall u, v, w \in B_r$  ve  $\varrho + \zeta + \vartheta = 1$  için

$$\|\varrho u + \zeta v + \vartheta w\|^2 \leq \varrho \|u\|^2 + \zeta \|v\|^2 + \vartheta \|w\|^2 - \varrho \zeta \varrho (\|u - v\|),$$

olmak üzere  $\varrho, \zeta, \vartheta \in [0, 1]$  dir (Cho vd 2004).

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, öncelikle, genişlemeyen dönüşümler için yeni bir algoritma tanıtılmış ve daha sonra düzgün konveks Banach uzayında bu dönüşüm için bazı yakınsama teoremleri sunulmuştur.

Son olarak, önerilen iterasyonun Mann,  $S$  –iterasyonu, Abbas&Nazir İterasyon Metodu, Thakur, Thakur, Postolache İterasyon Metodu,  $M$  iterasyonu, ve  $Z$  – iterasyonlarıyla sabit noktaya yakınsama hızları karşılaştırmak için sayısal örneklere yer verilmiştir. Bölümdeki tüm hesaplamalar Matlab R2016a bilgisayar programı yardımıyla gerçekleştirilmiştir.

### 4.1. Genişlemeyen Dönüşümlerin Yakınsamaları

$\mathbb{E}$  bir normlu uzay,  $\mathbb{U}, \mathbb{E}'$  nin boştan farklı konveks bir alt kümesi,  $Y: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$  bir dönüşüm ve  $x_0 \in \mathbb{U}$  için

$$\begin{cases} c_n = Yk_n, \\ k_n = (1 - \varrho_n)x_n + \varrho_n Yx_n, \\ b_n = Y[(1 - \theta_n)x_n + \theta_n f_n], \\ f_n = (1 - \zeta_n)c_n + \zeta_n Yc_n, \\ x_{n+1} = Y[(1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n b_n], n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklinde modifiye edilmiş  $Z$  – iterasyonu tanımlanır. Burada,  $\{\varrho_n\}, \{\zeta_n\}, \{\theta_n\}, \{\gamma_n\}$   $(0,1)$  aralığında reel dizilerdir.

**4.1.1. Sonuç:** Eğer,  $\theta_n = \gamma_n \equiv 1$  olarak seçilirse (4.1) şeması  $Z$  – iterasyonuna indirgenir.

### 4.2. Genişlemeyen Dönüşümler İçin Temel Sonuçlar

Yakınsama teoremlerinin ispatında kullanacağımız yardımcı teorem aşağıdaki şekilde verilmiştir.

**4.2.1. Yardımcı Teorem:**  $\mathfrak{E}$  bir normlu uzay,  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{E}$ ' nin boştan farklı kapalı, konveks alt kümesi,  $\Upsilon: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$  bir genişlemeyen dönüşüm ve  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  olsun.  $\{\varrho_n\}, \{\zeta_n\}, \{\theta_n\}, \{\gamma_n\}$   $(0,1)$  aralığında reel diziler olsun. Herhangi bir  $x_0 \in \mathfrak{U}$  olmak üzere

$$\begin{cases} \liminf_{n \rightarrow \infty} \zeta_n > 0, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \theta_n > 0, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma_n > 0, \\ 0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \varrho_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} \varrho_n < 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

(4.1) deki gibi  $\{x_n\}$  dizisi tanımlansın. Bu durumda,

- i.  $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \mathcal{P}\|$  limiti mevcuttur;
- ii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \Upsilon x_n\| = 0$  eşitliği elde edilir.

**İspat:** i.  $\mathcal{P} \in \mathcal{F} \neq \emptyset$  olsun.  $\Upsilon$  genişlemeyen dönüşüm ve (4.1) iterasyon şemasından dolayı,

$$\|k_n - \mathcal{P}\| \leq \|(1 - \varrho_n)x_n + \varrho_n \Upsilon x_n - \mathcal{P}\| \leq \|x_n - \mathcal{P}\|, \quad (4.3)$$

$$\|c_n - \mathcal{P}\| \leq \|\Upsilon k_n - \mathcal{P}\| \leq \|k_n - \mathcal{P}\| \leq \|x_n - \mathcal{P}\| \text{ ((4.3) den)} \quad (4.4)$$

(4.1) ve (4.4) ifadelerinden,

$$\begin{aligned} \|b_n - \mathcal{P}\| &\leq \|\Upsilon[(1 - \theta_n)x_n + \theta_n f_n] - \mathcal{P}\| \\ &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - \mathcal{P}\| + \theta_n\|f_n - \mathcal{P}\| \\ &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - \mathcal{P}\| \\ &+ \theta_n\|[(1 - \zeta_n)c_n + \zeta_n \Upsilon c_n] - \mathcal{P}\| \\ &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - \mathcal{P}\| + \theta_n\|c_n - \mathcal{P}\| \\ &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - \mathcal{P}\| + \theta_n\|x_n - \mathcal{P}\| \text{ ((4.4) den)} \\ &\leq \|x_n - \mathcal{P}\|, \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.1) ve (4.5) ifadeleri kullanılarak,

$$\|x_{n+1} - \mathcal{P}\| \leq \|\Upsilon[(1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n b_n] - \mathcal{P}\| \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} &\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n\|b_n - p\| \\ &\leq \|x_n - p\| \text{ ((4.5) den)} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikten  $\{\|x_n - p\|\}$  nin azalan ve sınırlı olduğu anlaşılır. Bu yüzden,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$  limiti vardır.

ii. (4.1) iterasyon şeması ve 3.3.5 Yardımcı Teoremden dolayı,

$$\begin{aligned} \|c_n - p\|^2 &\leq \|\Upsilon k_n - p\|^2 & (4.7) \\ &\leq \|k_n - p\|^2 \\ &\leq (1 - \varrho_n)\|x_n - p\|^2 + \varrho_n\|\Upsilon x_n - p\|^2 \\ &\quad - \varrho_n(1 - \varrho_n)\varphi_1(\|\Upsilon x_n - x_n\|) \\ &\leq \|x_n - p\|^2 - \varrho_n(1 - \varrho_n)\varphi_1(\|\Upsilon x_n - x_n\|), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|f_n - p\|^2 &\leq (1 - \zeta_n)\|c_n - p\|^2 + \zeta_n\|\Upsilon c_n - p\|^2 & (4.8) \\ &\quad - \zeta_n(1 - \zeta_n)\varphi_2(\|\Upsilon c_n - c_n\|) \\ &\leq \|c_n - p\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2 - \varrho_n(1 - \varrho_n)\varphi_1(\|\Upsilon x_n - x_n\|) \text{ ((4.7) den)} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, (4.1), (4.8) ifadeleri ve Yardımcı Teorem 3.3.5 den,

$$\begin{aligned} \|b_n - p\|^2 & & (4.9) \\ &\leq \|\Upsilon[(1 - \theta_n)x_n + \theta_n f_n] - p\|^2 \\ &\leq \|[ (1 - \theta_n)x_n + \theta_n f_n ] - p\|^2 \\ &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\|^2 + \theta_n\|f_n - p\|^2 \\ &\quad - \theta_n(1 - \theta_n)\varphi_3(\|f_n - x_n\|) \\ &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\|^2 + \theta_n\|f_n - p\|^2 \\ &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\|^2 \\ &\quad + \theta_n[\|x_n - p\|^2 - \varrho_n(1 - \varrho_n)\varphi_1(\|\Upsilon x_n - x_n\|)] \text{ ((4.8) den)} \\ &\leq \|x_n - p\|^2 - \varrho_n\theta_n(1 - \varrho_n)\varphi_1(\|\Upsilon x_n - x_n\|), \end{aligned}$$

ve

$$\|x_{n+1} - p\|^2 \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|Y[(1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n b_n] - p\|^2 \\
&\leq \|(1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n b_n - p\|^2 \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - p\|^2 + \gamma_n\|b_n - p\|^2 \\
&\quad - \gamma_n(1 - \gamma_n)\mathcal{G}_4(\|x_n - b_n\|) \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - p\|^2 + \gamma_n\|b_n - p\|^2 \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - p\|^2 \\
&\quad + \gamma_n[\|x_n - p\|^2 - \varrho_n\theta_n(1 - \varrho_n)\mathcal{G}_1(\|Yx_n - x_n\|)] \text{ ((4.9) dan)} \\
&\leq \|x_n - p\|^2 - \varrho_n\theta_n\gamma_n(1 - \varrho_n)\mathcal{G}_1(\|Yx_n - x_n\|),
\end{aligned}$$

bulunur. (4.10) da gerekli düzenlemeler gerçekleştiğinde,

$$\varrho_n\theta_n\gamma_n(1 - \varrho_n)\mathcal{G}_1(\|Yx_n - x_n\|) \leq \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2 \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.2) deki varsayımdan,

$$0 < \aleph < \zeta_n, 0 < \aleph < \theta_n, 0 < \aleph < \gamma_n \text{ ve } \varrho_n < \aleph^* < 1, n_0 \leq n, \quad (4.12)$$

olacak şekilde  $\aleph, \aleph^* \in (0,1)$  ve  $n_0 \in \mathbb{Z}^+$  vardır. Buradan,

$$\aleph^3(1 - \aleph)\mathcal{G}_1(\|Yx_n - x_n\|) \leq \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2, n_0 \leq n \quad (4.13)$$

elde edilir.  $n_0 \leq \omega$  için (4.13) ifadesini takiben,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=n_0}^{\omega} \mathcal{G}_1(\|Yx_n - x_n\|) \quad (4.14) \\
&\leq \frac{1}{\aleph^3(1 - \aleph)} \left\{ \sum_{n=n_0}^{\omega} (\|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2) \right\} \\
&\leq \frac{1}{\aleph^3(1 - \aleph)} \|x_{n_0} - p\|^2,
\end{aligned}$$

olur. Buradan  $\sum_{n=n_0}^{\omega} \mathcal{G}_1(\|Yx_n - x_n\|) < \infty$ , ve böylelikle  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_1(\|Yx_n - x_n\|) = 0$  olduğu görülür. Yardımcı Teorem 3.3.5 den  $\mathcal{G}(0) = 0$  kesin artan sürekli ve konveks fonksiyonu olduğundan,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Yx_n\| = 0$  eşitliği elde edilir.

**4.2.2. Teorem:**  $\mathfrak{E}$  düzgün konveks bir Banach uzay,  $\mathfrak{U}$ , Opial şartını sağlayan  $\mathfrak{E}$ ' nin boştan farklı kapalı, konveks bir alt kümesi ve  $\Upsilon: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$  bir genişlemeyen dönüşüm ve  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  olsun.  $\{\varrho_n\}, \{\zeta_n\}, \{\theta_n\}, \{\gamma_n\}$  dizileri 4.2.1. Yardımcı Teoremindeki gibi olsun. Bu durumda  $\{x_n\} \rightarrow e^* \in \mathcal{F}$  dir.

**İspat:** 4.2.1. Yardımcı Teoreminden  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$  vardır. Düzgün konveks bir  $\mathfrak{E}$  Banach uzayında sınırlı  $\{x_n\}$  dizisinin,  $e^* \in \mathfrak{U}$  noktasına zayıf yakınsayan bir  $\{x_{n_j}\}$  alt dizisi vardır. 4.2.1. Yardımcı Teoreminden  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - \Upsilon x_{n_j}\| = 0$  olur. Ayrıca 3.3.4 Yardımcı Teoremden  $(I - \Upsilon)$  sıfırda demiclosed olduğundan  $\Upsilon e^* = e^*$  yazılır. Yani  $e^* \in \mathcal{F}$  dir. Şimdi  $\{x_n\} \rightarrow e^*$  olduğunu göstereceğiz.  $\{x_n\}$  dizisinin  $e^+ \in \mathfrak{U}$  noktasına zayıf yakınsayan farklı bir  $\{x_{n_j}\}$  alt dizisini ele alalım. Aynı ispat yolu izlenerek  $e^+ \in \mathcal{F}$  elde edilir. Şimdi  $e^* = e^+$  olduğunu gösterelim: Varsayalım ki  $e^* \neq e^+$  dir. Opial şartından dolayı,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - e^*\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - e^*\| \\ &< \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - e^+\| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - e^+\| \\ &< \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - e^*\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - e^*\| \end{aligned}$$

dir. Bu bir çelişkidir. Öyleyse,  $e^* = e^+$  dir. Bu durumda  $\{x_n\} \rightarrow e^* \in \mathcal{F}$  dir.

**4.2.3. Teorem:**  $\mathfrak{E}$  düzgün konveks bir Banach uzayı ve  $\mathfrak{U}, \mathfrak{E}$  ve  $\{x_n\}$  dizisi 4.2.1. Yardımcı Teoremindeki gibi tanımlansın. Bu durumda  $\{x_n\}$  dizisinin  $\mathcal{F}$  nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart  $n \geq 1$  için  $d(x_n, \mathcal{F}) = \inf_{p \in \mathcal{F}} \|x_n - p\|$  olmak üzere  $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$  ifadesinin sağlanmasıdır.

**İspat:** Gereklik aşıkardır. Bu nedenle, yalnızca yeterlilik kısmı ispatlayalım.  $p \in \mathcal{F}$  için, (4.6) dan

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\| \quad (4.15)$$

yazılır. 4.2.1. Yardımcı Teoreminden  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \mathcal{F})$  limitinin var ve böylelikle  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$  elde edilir.

Şimdi,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$  olduğundan, verilen bir  $\varepsilon > 0$  sayısı için, her  $n \geq n_0$  olmak üzere  $d(x_n, \mathcal{F}) < \frac{\varepsilon}{2}$  olacak şekilde pozitif bir  $n_0$  tamsayısı vardır. Bu da,  $\|x_{n_0} - p^+\| < \frac{\varepsilon}{2}$  olacak şekilde  $p^+ \in \mathcal{F}$  sabit noktasının var olduğu anlamına gelir. Buradan,  $n, m \geq n_0$  iken

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \|x_{n+m} - p^+\| + \|x_n - p^+\| \leq 2\|x_{n_0} - p^+\| < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla,  $\{x_n\}$ ,  $\mathbb{E}$  de bir Cauchy dizisidir ve  $\mathbb{U}$ ,  $\mathbb{E}$  Banach Uzayında kapalı olduğundan,  $n \rightarrow \infty$  iken  $x_n \rightarrow p^*$  olacak şekilde  $p^* \in \mathbb{U}$  vardır. Şimdi  $p^* \in \mathcal{F}$  olduğunu ispat edelim. Varsayalım ki,  $p^* \in \mathcal{F}^t$ .  $\mathcal{F}$ ,  $\mathbb{E}$  nin kapalı bir alt kümesi olduğundan  $d(p^*, \mathcal{F}) > 0$  yazılabilir. Ancak,  $\forall q \in \mathcal{F}$  için,

$$\|p^* - q\| \leq \|p^* - x_n\| + \|x_n - q\|$$

olup buradan,

$$d(p^*, \mathcal{F}) \leq \|x_n - p^*\| + d(x_n, \mathcal{F})$$

elde edilir.  $n \rightarrow \infty$  için  $d(p^*, \mathcal{F}) > 0$  çelişkisinden dolayı,  $d(p^*, \mathcal{F}) = 0$  dır. Bu yüzden,  $p^* \in \mathcal{F}$ .

**4.2.4 Teorem:**  $\mathbb{E}$  düzgün konveks bir Banach uzayı ve  $\mathbb{U}$ ,  $\mathbb{E}$  ve  $\{x_n\}$  dizisi 4.2.1. Yardımcı Teoremdeki gibi tanımlansın. Eğer  $Y$  dönüşümü (A) şartını sağlıyorsa bu durumda  $\{x_n\} \rightarrow p^* \in \mathcal{F}$  dir.

**İspat:** (A) şartı ve 4.2.1. Yardımcı Teoreminden dolayı,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, \mathcal{F})) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Yx_n\| = 0$$

elde edilir. Yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, \mathcal{F})) = 0$  yazılır. Her  $r \in (0, \infty)$  için  $f(r) > 0$ ,  $f(0) = 0$  olacak şekilde azalmayan  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  fonksiyonun varlığından  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$  sonucu elde edilir. 4.2.3. Teoremdeki ispat yolu takip edilirse,  $\{x_n\}$  dizisi bir Cauchy

dizisi olduğu görülür.  $\exists$  tam olduğundan bu dizi yakınsaktır.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p^*$  olsun.  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$  olduğundan  $d(p^*, \mathcal{F}) = 0$  dır.  $\mathcal{F}$  kapalı olup  $p^* \in \mathcal{F}$  dir. Bu durumda  $\{x_n\} \rightarrow p^* \in \mathcal{F}$  dir.

### 4.3. Sayısal Örnekler

Genişlemeyen dönüşümler için yeni oluşturulan iterasyon algoritmasını kullanarak elde edilen sonuçları literatürde var olan bazı iterasyon yöntemleriyle karşılaştırmak için Matlab R2016a kullanıyoruz.

#### 4.3.1 Örnek:

$\exists$  alışılmış norma sahip reel sayılar kümesi,  $\mathcal{U} = (-1,1)$  olsun.  $Y: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $Yx = -x$  genişlemeyen dönüşümün olup  $\mathcal{F} = \{0\} \neq \emptyset$  dır.  $\forall n \geq 1$  için

$$\{\varrho_n\} = \{\zeta_n\} = \{\theta_n\} = \{\gamma_n\} = \frac{21}{66}$$

olarak seçelim. Kolay hesaplama yapabilmek için iterasyon şemamızda  $n = 1$  olarak düşündük. (4.1) şeması şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{cases} c_1 = Yk_1, \\ k_1 = \left(1 - \frac{21}{66}\right)x_1 + \frac{21}{66}Yx_1, \\ b_1 = Y\left[\left(1 - \frac{21}{66}\right)x_1 + \frac{21}{66}f_1\right], \\ f_1 = \left(1 - \frac{21}{66}\right)c_1 + \frac{21}{66}Yc_1, \\ x_1 = Y\left[\left(1 - \frac{21}{66}\right)x_1 + \frac{21}{66}b_1\right]. \end{cases} \quad (4.16)$$

Benzer şekilde,  $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  hesaplanabilir. 2.1. Tabloda başlangıç terimi  $x_0 = \frac{1}{10}$  ve  $x_0 = -\frac{2}{10}$ ,  $x_0 = \frac{3}{10}$  ve  $x_0 = 1$  için  $\{x_n\}$  dizisinin ilk yirmi değerini veriyoruz. 4.1. Tablo yardımıyla  $x_n \rightarrow 0.0$  elde ediyoruz. Bu, 4.2.3 Teorem'in uygulanabilir olduğu anlamına gelir.

**Tablo 2: Başlangıç Tahminleriyle Önerilen Yinelemeli Yöntemin Sayısal Sonuçları**

$n$	$x_0 = \frac{1}{10}$	$x_0 = -\frac{2}{10}$	$x_0 = \frac{3}{10}$	$x_0 = 1$
1	-0.0478	0.0957	-0.1435	-0.4783
2	0.0229	-0.0457	0.0686	0.2287
3	-0.0109	0.0219	-0.0328	-0.1094
4	0.0052	-0.0105	0.0157	0.0523
5	-0.0025	0.0050	-0.0075	-0.0250
6	0.0012	-0.0024	0.0036	0.0120
7	$-5.7236E - 04$	0.0011	-0.0017	-0.0057
8	$2.7374E - 04$	$-5.4748E - 04$	$8.2121E - 04$	0.0027
9	$-1.3092E - 04$	$2.6184E - 04$	$-3.9276E - 04$	-0.0013
10	$6.2614E - 05$	$-1.2523E - 04$	$1.8784E - 04$	$6.2614E - 04$
11	$-2.9946E - 05$	$5.9892E - 05$	$-8.9837E - 05$	$-2.9946E - 04$
12	$1.4322E - 05$	$-2.8644E - 05$	$4.2966E - 05$	$1.4322E - 04$
13	$-6.8497E - 06$	$1.3699E - 05$	$-2.0549E - 05$	$-6.8497E - 05$
14	$3.2759E - 06$	$-6.5519E - 06$	$9.8278E - 06$	$3.2759E - 05$
15	$-1.5668E - 06$	$3.1335E - 06$	$-4.7003E - 06$	$-1.5668E - 05$
16	$7.4932E - 07$	$-1.4986E - 06$	$2.2480E - 06$	$7.4932E - 06$
17	$-3.5837E - 07$	$7.1675E - 07$	$-1.0751E - 06$	$-3.5837E - 06$
18	$1.7140E - 07$	$-3.4279E - 07$	$5.1419E - 07$	$1.7140E - 06$
19	$-8.1973E - 08$	$1.6395E - 07$	$-2.4592E - 07$	$-8.1973E - 07$
20	0	$-7.8409E - 08$	$1.1761E - 07$	$3.9205E - 07$

**4.3.2. Örnek:**

$\mathbb{E}$  alışılmış norma sahip reel sayılar kümesi,  $\mathcal{U} = [5,37]$  olsun.  $\Upsilon: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $\Upsilon x = \sqrt{54 - 9x + x^2}$  bir dönüşümün olup  $\mathcal{F} = \{6\} \neq \emptyset$  dır.  $\forall n \geq 1$  için

$$\{\varrho_n\} = \{\zeta_n\} = \{\theta_n\} = \{\gamma_n\} = \frac{8}{14}$$

olarak seçelim (Thakur vd 2016b).

Tablo 3’de başlangıç terimi  $x_0 = 5.0$  ve  $x_0 = 13.0$ ,  $x_0 = 22.0$  ve  $x_0 = 37.0$  için  $\{x_n\}$  dizisinin ilk on değerini veriyoruz. Tablo 3 yardımıyla  $x_n \rightarrow 6$  elde ediyoruz. Bu, 4.2.4 Teorem’in uygulanabilir olduğu anlamına gelir.

**Tablo 3: Başlangıç Tahminleriyle Önerilen Yinelemeli Yöntemin Sayısal Sonuçları**

$n$	$x_0 = 5.0$	$x_0 = 13.0$	$x_0 = 22.0$	$x_0 = 37.0$
1	5.8975	8.1551	14.4582	28.1262
2	5.9875	6.3773	8.9534	19.8269
3	5.9985	6.0500	6.5773	12.6965
4	5.9998	6.0063	6.0792	8.0035
5	6.0000	6.0008	6.0100	6.3432
6	6.0000	6.0001	6.0012	6.0452
7	6.0000	6.0000	6.0002	6.0057
8	6.0000	6.0000	6.0000	6.0007
9	6.0000	6.0000	6.0000	6.0001
10	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000

### 4.3.3. Örnek:

$\mathbb{E}$  alışılmış norma sahip reel sayılar kümesi,  $\mathcal{U} = [0, \infty)$  olsun.  $Y: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $Yx = \sin x$  bir dönüşümün olup  $\mathcal{F} = \{0\} \neq \emptyset$  dır.  $\forall n \geq 1$  için

$$\{\varrho_n\} = \{\zeta_n\} = \{\theta_n\} = \{\gamma_n\} = \frac{8}{14}$$

olarak seçelim.

Tablo 4’de başlangıç terimi  $x_0 = \frac{\pi}{3}$  için modifiye edilmiş  $Z$  – İterasyonu, Mann,  $S$  – iterasyonu, Abbas&Nazir İterasyon Metodu ve  $Z$  – iterasyonu ile sabit noktaya yakınsama hızları karşılaştırıldı. Tablodaki veriler doğrultusunda modifiye edilmiş  $Z$  – iterasyonunun, (3.4), (3.7) ve (3.8) iterasyonlarından hızlı olduğu görüldü.

**Tablo 4: Mann,  $S$  – İterasyonu, Abbas&Nazir İterasyon Metodu, Modifiye Edilmiş  $Z$ - İterasyonu ile Sabit Noktaya Yakınsama Hızları Karşılaştırılması**

$n$	(3.4) iterasyonu	(3.7) iterasyonu	(3.8) iterasyonu	(4.1) iterasyonu
-----	------------------	------------------	------------------	------------------

1	1.0472	1.0472	1.0472	1.0472
2	0.9437	0.8338	0.7801	0.7774
3	0.8671	0.7195	0.6549	0.6452
4	0.8073	0.6439	0.5770	0.5632
5	0.7588	0.5888	0.5223	0.5061
6	0.7184	0.5463	0.4809	0.4634
7	0.6840	0.5120	0.4482	0.4299
8	0.6542	0.4836	0.4215	0.4028
9	0.6281	0.4596	0.3992	0.3802
10	0.6050	0.4389	0.3801	0.3610
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	0.2222	0.1478	0.1243	0.1143
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
200	0.1594	0.1053	0.0884	0.0811
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
300	0.1308	0.0863	0.0723	0.0662
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
400	0.1136	0.0748	0.0627	0.0574
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
500	0.1018	0.0670	0.0561	0.0513

Tablo 5’de başlangıç terimi  $x_0 = \frac{\pi}{3}$  için Modifiye edilmiş  $Z -$  İterasyonu, Thakur, Thakur, Postolache İterasyon Metodu,  $M$  iterasyonu, ve  $Z -$  iterasyonu ile sabit noktaya yakınsama hızları karşılaştırıldı. (3.9), (3.10) ve (3.11) iterasyonlarının (4.1) iterasyonundan hızlı olduğu görüldü.

**Tablo 5: Thakur, Thakur, Postolache İterasyon Metodu,  $M$  İterasyonu ve  $Z$ -İterasyonu ile, Modifiye Edilmiş  $Z$ - İterasyonu ile Sabit Noktaya Yakınsama Hızları Karşılaştırılması**

$n$	(3.9) iterasyonu	(3.10) iterasyonu	(3.11) iterasyonu	(4.1) iterasyonu
1	1.0472	1.0472	1.0472	1.0472
2	0.7413	0.7241	0.6361	0.7774
3	0.6125	0.5937	0.5042	0.6452
4	0.5352	0.5168	0.4316	0.5632
5	0.4820	0.4642	0.3838	0.5061

6	0.4424	0.4253	0.3492	0.4634
7	0.4113	0.3949	0.3226	0.4299
8	0.3860	0.3703	0.3013	0.4028
9	0.3650	0.3499	0.2838	0.3802
10	0.3471	0.3325	0.2690	0.3610
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	0.1123	0.1069	0.0846	0.1143
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
200	0.0798	0.0760	0.0600	0.0811
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
300	0.0653	0.0621	0.0490	0.0662
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
400	0.0566	0.0539	0.0425	0.0574
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
500	0.0507	0.0482	0.0380	0.0513

## 5. SONUÇ

Bu bölümde ise çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar verilecektir.

**5.1. Sonuç:**  $\mathbb{E}$  düzgün konveks bir Banach uzay,  $\mathcal{U}$ , Opial şartını sağlayan  $\mathbb{E}$ ' nin boştan farklı kapalı, konveks bir alt kümesi ve  $\Upsilon: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  bir genişlemeyen dönüşüm ve  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  olsun.  $\{\varrho_n\}, \{\zeta_n\}, \{\theta_n\}, \{\gamma_n\}$   $(0,1)$  aralığında reel diziler olsun. Herhangi bir  $x_0 \in \mathcal{U}$  olmak üzere

$$\begin{cases} \liminf_{n \rightarrow \infty} \zeta_n > 0, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \theta_n > 0, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma_n > 0, \\ 0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \varrho_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} \varrho_n < 1, \end{cases} \quad (5.1)$$

Bu durumda  $\{x_n\} \rightarrow e^* \in \mathcal{F}$  dir.

**5.2. Sonuç:**  $\mathbb{E}$  düzgün konveks bir Banach uzayı ve  $\mathcal{U}$ ,  $\mathbb{E}$  ve  $\{x_n\}$  dizisi 5.1. Sonuçtaki gibi olsun. Bu durumda  $\{x_n\}$  dizisinin  $\mathcal{F}$  nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart  $n \geq 1$  için  $d(x_n, \mathcal{F}) = \inf_{p \in \mathcal{F}} \|x_n - p\|$  olmak üzere  $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$  ifadesinin sağlanmasıdır.

**5.3. Sonuç:**  $\mathbb{E}$  düzgün konveks bir Banach uzayı ve  $\mathcal{U}$ ,  $\mathbb{E}$  ve  $\{x_n\}$  dizisi 5.1. Sonuçtaki gibi olsun. Eğer  $\Upsilon$  dönüşümü  $(A)$  şartını sağlıyorsa bu durumda  $\{x_n\} \rightarrow p^* \in \mathcal{F}$  dir.

İkinci ve son olarak, tanıtılan iterasyonun Mann,  $S$  –iterasyonu, Abbas&Nazir İterasyon Metodu, Thakur, Thakur, Postolache İterasyon Metodu,  $M$  iterasyonu, ve  $Z$  – iterasyonu ile sabit noktaya yakınsama hızları karşılaştırmak için dördüncü bölümde sayısal örneklere yer verilmiştir. Modifiye edilmiş  $Z$  – İterasyonunun, Mann,  $S$  –iterasyonu, Abbas&Nazir İterasyon Metotlarından hızlı olduğu, Thakur, Thakur, Postolache İterasyon Metodu,  $M$  iterasyonu, ve  $Z$  – iterasyonundan yavaş olduğu gözlemlendi.

## KAYNAKÇA

- Abbas, M., & Nazir, T. (2014). A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems. *Matematički Vesnik*, 66(2), 223-234
- Abdeljawad, T., Karaca, N. K., Yildirim, I., & Mukheimer, A. (2024). Approximation of fixed points for a new class of generalized non-expansive mappings in Banach spaces. *AIMS Mathematics*, 9(5), 11958–11974.
- Agarwal, R. P., Meehan, M., & O'Regan, D. (2001). *Fixed Point Theory and Applications*. Cambridge University Press.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D., & Sahu, D. R. (2009). *Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications*. Springer, 368p, New York, U.S.A.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D., & Sahu, D. R. (2007). Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 8(1), 61–79.
- Albert, Y. I., Chidume, C. E., & Zegeye, H. (2005). Approximation fixed points of total asymptotically nonexpansive mappings. *Fixed Point Theory and Applications*, Article ID 10673.
- Ali, F., Ali, J. İ., & Rodríguez-López, R. (2021). Approximation of fixed points and the solution of a nonlinear integral equation. *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 26(5), 869-885.
- Aksoy, A. G., & Khamsi, M. A. (1990). *Nonstandard Methods in Fixed Point Theory*. Springer. 148p, New York.
- Başkan, T., Bizim, O., & Cangül, İ. N. (2006). *Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş*. Nobel Yayınları No:1017, 153s, Ankara.
- Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*. Gazi Kitabevi, 320s, Ankara.
- Berinde, V. (2002). *Iterative Approximation of Fixed Points*. Editura Efemeride, Baia Mare
- Berinde, V. (2006). *Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics*, Springer, 315p, Heidelberg, Germany.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2010). *Numerical Analysis* (9th edn). Brooks/Cole Cengage Learning, Boston

- Chidume, C. E., Ofoedu, E. U., & Zegeye, H. (2003). Strong and weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 280(1), 364-374.
- Cho, Y. J., Zhou, H., & Guo, G. (2004). Weak and strong convergence theorems for three-step iterations with errors for asymptotically nonexpansive mappings. *Computers & Mathematics with Applications*, 47(5-6), 707-717.
- Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44(1), 147-150.
- Jia, J., Shabbir, K., Ahmad, K., Shah, N. A., & Botmart, T. (2022). Strong convergence of a new hybrid iterative scheme for nonexpansive mappings and applications. *Journal of Function Spaces*, 2022, Article ID 4855173, 11 pages.
- Khamsi, M. A., & Kirk, W. A. (2001). *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*. Wiley-Interscience Publication, 301p, New York, U.S.A.
- Kirk, W. A. (1971). On successive approximation for nonexpansive mappings in Banach spaces. *Glasgow Mathematical Journal*, 6-9.
- Krasnoselskij, M. A. (1955). Two remarks on the method of successive approximations. *Uspehi Matematicheskikh Nauk*, 10, 123-127
- Kreyszig, E. (1989). *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library Edition Published.
- Mann, W. R. (1953). Mean value methods in iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4, 506-510.
- Maiti, N., & Ghosh, M. K. (1989). Approximating fixed points by Ishikawa iterates. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 40, 113-117. 2, 2
- Noor, M. A. (2000). New approximation schemes for general variational inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251, 217-229.
- Opial, Z. (1967). Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 591-597.
- Picard, E. (1890). *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 6(4), 145-210.
- Rhoades, B. E. (1974). Fixed point iterations using infinite matrices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 196, 161-176.
- Rhoades, B. E. (1976). Comments on two fixed point iteration method. *J. Math. Anal. Appl.* 56(2), 741-750.

- Rhoades, B. E. (1994). Fixed point iterations for certain nonlinear mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, 183, 118-120.
- Senter, H. F., & Dotson, W. G. (1974). Approximating fixed points of nonexpansive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44, 375-380.
- Srivastava, R., Ahmed, W., Tassaddiq, A., & Alotaibi, N. (2024). Efficiency of a new iterative algorithm using fixed-point approach in the settings of uniformly convex Banach spaces. *Axioms*, 13(8), Article 502.  
<https://doi.org/10.3390/axioms13080502>
- Soykan, Y. (2008). *Fonksiyonel Analiz*, Nobel Yayın No:1328, 504s, Ankara.
- Tan, K. K., & Xu, H. K. (1993). Approximating fixed points of nonexpansive mappings by Ishikawa iteration process, *J. Math. Anal. Appl.*, 178, 301-308.
- Thakur, B.S., Thakur, D., Postolache, M. (2016a). A new iterative scheme for numerical reckoning fixed points of Suzuki's generalized nonexpansive mappings. *Appl. Math. Comput.*, 275, 147-155.
- Thakur, B. S., et al. (2016b). A New Iteration scheme for approximating fixed points of nonexpansive mappings. *Filomat*, 30(10), 2711-2720.
- Ullah, K., & Arshad, M. (2018). Numerical reckoning fixed points for Suzuki's generalized nonexpansive mappings via new iteration process. *Filomat*, 32, 187-196.
- Yıldırım, İ. (2010). *Asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit noktaları için yeni yaklaşım metotları* (Doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye.
- Yolacan, E. (2015). *Banach uzaylarında total asimptotik genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta yaklaşımları* (Doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye.